# 13.4 Symmetriske lineærtransformasjoner (Lay 7.1)

## Definisjon

- En matrise M kalles symmetrisk hvis $M = M^T$
- En lineærtransformasjon $T : V \to V$ fra et indreproduktrom til seg selv kalles symmetrisk hvis

$$\langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, T(\vec{v}) \rangle \quad \text{for alle } \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

**eks. 1** $M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 5 & 2 & 4 \\ -7 & 4 & 17 \end{bmatrix}$ er en symmetrisk matrise

**eks. 2** $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ved $T(p) = p'$ ($p'$ = den deriverte av $p$)

er ikke symmetrisk under $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \, dx$

Moteksempel:

$$\langle T(x^3), x^2 \rangle = \langle 3x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 3x^2 \cdot x^2 \, dx$$

$$= 3 \int_0^1 x^4 \, dx = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\langle x^3, T(x^2) \rangle = \langle x^3, 2x \rangle = \int_0^1 x^3 \cdot 2x \, dx = \frac{2}{5}$$

Altså: $\langle T(x^3), x^2 \rangle \neq \langle x^3, T(x^2) \rangle$ $\square$

**Teorem 1**

La $T: V \to V$ være en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$$

være en ortonormal basis for $V$. Da har vi

$$T \text{ er symmetrisk} \iff [T]_B \text{ er en symmetrisk matrise}$$

**Bevis** $\Rightarrow$ Vi har

Teorem 12.4.3

$$[T]_B = \left[ [T(\vec{b}_1)]_B \ \cdots \ [T(\vec{b}_n)]_B \right]$$

Fordi $B$ er en ortonormal basis

$$= \begin{bmatrix} \langle \vec{b}_1, T(\vec{b}_1) \rangle & \langle \vec{b}_1, T(\vec{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_1, T(\vec{b}_n) \rangle \\ \langle \vec{b}_2, T(\vec{b}_1) \rangle & \langle \vec{b}_2, T(\vec{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_2, T(\vec{b}_n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{b}_n, T(\vec{b}_1) \rangle & \langle \vec{b}_n, T(\vec{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_n, T(\vec{b}_n) \rangle \end{bmatrix}$$

Her er

$$\langle \vec{b}_2, T(\vec{b}_1) \rangle = \langle T(\vec{b}_2), \vec{b}_1 \rangle$$

Fordi $T$ er symmetrisk

$$= \langle \vec{b}_1, T(\vec{b}_2) \rangle$$

$$\langle \vec{b}_n, T(\vec{b}_1) \rangle = \langle T(\vec{b}_n), \vec{b}_1 \rangle$$

$$= \langle \vec{b}_1, T(\vec{b}_n) \rangle$$

osv. Altså er matrisen $[T]_B$ symmetrisk.

$\Leftarrow$ For alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ har vi

Teorem 13.1.3 (B ortonormal)

$(MN)^T = N^T M^T$

Antakelsen: $[T]_B^T = [T]_B$

Teorem 13.1.3 (B ortonormal)

$$
\begin{aligned}
\langle T(\vec{x}), \vec{y} \rangle &= \left( [T(\vec{x})]_B \right)^T \cdot [\vec{y}]_B \\
&= \left( [T]_B \cdot [\vec{x}]_B \right)^T \cdot [\vec{y}]_B \\
&= [\vec{x}]_B^T \cdot [T]_B^T \cdot [\vec{y}]_B \\
&= [\vec{x}]_B^T \cdot [T]_B \cdot [\vec{y}]_B \\
&= [\vec{x}]_B^T \cdot [T(\vec{y})]_B \\
&= \langle \vec{x}, T(\vec{y}) \rangle . \quad \square
\end{aligned}
$$

**Teorem 2**

La $T : V \to V$ være en symmetrisk lineærtransformasjon fra et indreproduktrom til seg selv. Anta at

$$\lambda_1 \text{ og } \lambda_2$$

er to ulike egenverdier for $T$ med tilhørende egenvektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ henholdsvis. Da er

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$$

**Bevis**

$$0 \overset{T \text{ symmetrisk}}{=} \langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle - \langle \vec{v}_1, T(\vec{v}_2) \rangle$$

$$= \langle \lambda_1 \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle - \langle \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle$$

$$= \lambda_1 \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle - \lambda_2 \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

Siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, krever dette $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ □

**Teorem 3**

$V$ n-dimensjonalt indreproduktrom

$T : V \to V$ symmetrisk lineærtransformsjon

Da:

- Alle de karakteristiske røttene til $T$ er reelle, så $T$ har kun reelle egenverdier.
- $T$ har en egenbasis

**Bevis** KOLA kap. 14 (ikke pensum).

**Teorem 4**

$V$ n-dimensjonalt indreproduktrom

$T : V \to V$ symmetrisk lineærtransformasjon

Da har $T$ en ortonormal egenbasis.

**Bevis** Ved teorem 3 har $T$ en egenbasis bestående av $n$ vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

Vi kan gruppere disse etter egenverdi, det kan f.eks. se slik ut:

$$\underbrace{\vec{v}_1, \vec{v}_2}_{\lambda_1}, \underbrace{\vec{v}_3}_{\lambda_2}, \underbrace{\vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6}_{\lambda_3} \qquad (\text{her er } n = 6)$$

Vi kan så lage ortonormale basiser for hvert egenrom ved hjelp av Gram-Schmidt. Hvis vi slår alle disse ortonormale basisene sammen, får vi ved teorem 2 en ortonormal egenbasis for $T$. $\square$