$\boxed{\text{13.10 Anvendelse: Fouriertilnærming}}$ (Lay 6.8)

Situasjonen fra oblig 2 oppgave 2

V = mengden av kontinuerlige $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) g(x)\, dx$$

$$\mathcal{B} = \left\{ f_0, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{N\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \sin\frac{N\pi x}{L} \right\}$$

der $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (konstant funksjon)

$\mathcal{U}$ = underrommet av V utspent av $\mathcal{B}$

Da er $\mathcal{B}$ en ortonormal basis for $\mathcal{U}$ (punkt 2a) - 2e)).

Vi har

$$\int_{-L}^{L} \left(f(x) - \text{proj}_{\mathcal{U}} f(x) \right)^2 dx < \int_{-L}^{L} \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx$$

for alle $g \in \mathcal{U}$ slik at $g \neq \text{proj}_{\mathcal{U}} f$.

Altså er $\text{proj}_{\mathcal{U}} f$ den "beste" tilnærmingen til f blant funksjonene i $\mathcal{U}$.

Generelt har vi, dersom $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ er en ortonormal basis for et underrom U i et indreproduktrom V:

$$\boxed{\text{proj}_U \vec{v} = \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \vec{b}_n}$$

I vår situasjon blir dette, med vår basis B:

$$\text{proj}_U f = \langle f_0, f \rangle f_0 + \sum_{n=1}^{N} \left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{N} \left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Her får vi

$$\langle f_0, f \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_0(x) f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)\, dx = \frac{1}{L \cdot \sqrt{2}} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

Så $\langle f_0, f \rangle f_0 = \langle f_0, f \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = a_0$

Videre:

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = a_n$$

Definert i oppgaven

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = b_n$$

Innsatt:

$$\underline{\underline{\text{proj}_U f = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}}}$$

Vi tar så det konkrete eksemplet $f(x) = x$, $L = 1$.

Får da

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 1}\int_{-1}^{1} x \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x \cos(n\pi x)\, dx = 0$$

regn

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x \sin(n\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Innsatt:

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}} f = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$

For eksempel med $N = 4$:

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}} f = \frac{2}{\pi}\left[\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(4\pi x)\right]$$