$\boxed{\text{12.5 Overgangsmatriser}}$ (Lay 4.6, 5.4)

Hvis $T: V \to V$ er en lineærtransformasjon mellom endeligdimensjonale vektorrom, og $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ er to basiser for V, så vet vi at

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{for alle } \vec{v} \in V.$$

La nå

$$id : V \to V$$

være identitetstransformasjonen på V gitt ved

$$id(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{for alle } \vec{v} \in V.$$

Med $T = id$ har vi

$$[id(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [id]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Altså

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = [id]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Multiplikasjon med matrisen

$$[id]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$$

gir oss altså overgangen fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{B}'$. Derfor kalles den overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{B}'$.

Lay skriver denne

$$\underset{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}{P}$$

Hvordan finne overgangsmatriser

La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ være to basiser for et vektorrom V.

1. Direkte metode (fås fra tidligere resultat)

Søylene i overgangsmatrisen er koordinatvektorene til basisvektorene fra $\mathcal{B}$ uttrykt i basisen $\mathcal{C}$:

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \Big[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \Big]$$

2. Indirekte metode

Hvis $\mathcal{S}$ er en tredje basis for V (typisk "standardbasis"), så er

$$\begin{aligned}
[\mathrm{id}]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} \\
&= \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}} \right)^{-1} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} \\
&= \Big[[\vec{c}_1]_{\mathcal{S}} \cdots [\vec{c}_n]_{\mathcal{S}} \Big]^{-1} \cdot \Big[[\vec{b}_1]_{\mathcal{S}} \cdots [\vec{b}_n]_{\mathcal{S}} \Big]
\end{aligned}$$

Hvis alle koordinatvektorene $[\vec{c}_i]_{\mathcal{S}}$ og $[\vec{b}_i]_{\mathcal{S}}$ er kjente, er den indirekte metoden ofte enklere.

eks. 1 Finn overgangsmatrisen fra basisen

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

til standardbasisen

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{for } \mathbb{R}^3$$

Løsn. Vi har at

$$\left.\begin{aligned} [\vec{b}_1]_S &= \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [\vec{b}_2]_S &= \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [\vec{b}_3]_S &= \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Så

$$[id]_{S \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(direkte metode)

Test: La $\vec{v} = 5\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 7\vec{b}_3$

Da er $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\text{Så } [\vec{v}]_S = [id]_{S \leftarrow B} \cdot [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

stemmer!

På den annen side:

$$\vec{v} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 7 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eks. 2 Finn overgangsmatrisen fra

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{til} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

i vektorrommet $V = \mathbb{R}^2$.

Løsn. Indirekte metode:

$$\begin{aligned} [id]_{C \leftarrow B} &= [id]_{C \leftarrow S} \cdot [id]_{S \leftarrow B} \\ &= \left([id]_{S \leftarrow C} \right)^{-1} \cdot [id]_{S \leftarrow B} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den er sin egen invers, tenk over det

Direkte metode

Må finne

$$[\vec{b}_1]_C = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right]_C \quad \text{og} \quad [\vec{b}_2]_C = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right]_C$$

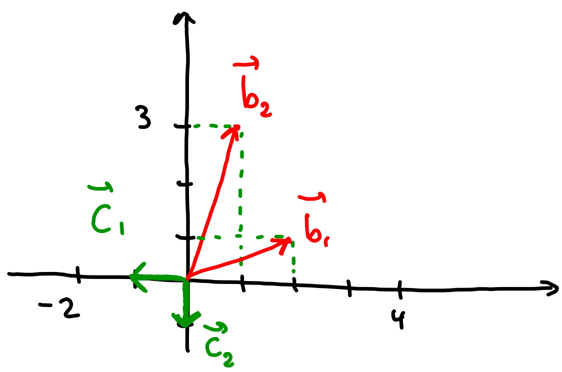
Altså skrive

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = p \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Da er

$$[id]_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

Kan tegne istedenfor å regne:



$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ser at

$$[\vec{b}_1]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{b}_2]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Altså $[id]_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [\vec{b}_1]_C & [\vec{b}_2]_C \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}}$

Merk at: $[\vec{b}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $[\vec{b}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi får så:

$$[\vec{b}_1]_C = [id]_{C \leftarrow B} \cdot [\vec{b}_1]_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{b}_2]_C = [id]_{C \leftarrow B} \cdot [\vec{b}_2]_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dette stemmer!