13.5 Ortogonale lineærtransformasjon (Lay 6.2)

Definisjon

- En $(n \times n)$-matrise M kalles ortogonal hvis søylevektorene er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.
- En lineærtransformasjon $T : V \to V$ fra et indreproduktrom til seg selv kalles ortogonal hvis

$$\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \text{for alle } \vec{u}, \vec{v} \in V$$

eks.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

er en ortogonal matrise. Søylevektorene er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$. (De har lengde 1 og indreprodukt 0)

Teorem 4

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la

$$B = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \}$$

være en ortonormal basis for V. Da har vi:

$$T \text{ er ortogonal} \iff [T]_B \text{ er en ortogonal matrise.}$$

Bevis Utsettes til etter teorem 1, 2 og 3.

Teorem 1

$T : V \to V$ ortogonal lineærtransformasjon

For alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gjelder da:

(1) $\|T(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

(2) $\|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

(3) T er invertibel, og T^{-1} er også ortogonal.

Bevis (1) $\|T(\vec{u})\|^2 = \langle T(\vec{u}), T(\vec{u}) \rangle \overset{\text{orto}}{=} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$

(2) $\|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\| = \|T(\vec{u} - \vec{v})\| \overset{(1)}{=} \|\vec{u} - \vec{v}\|$

(3) $T(\vec{u}) = \vec{0} \overset{(1)}{\Rightarrow} \|\vec{u}\| = 0$, så $\vec{u} = \vec{0}$

Så $\ker T = \{\vec{0}\}$, så T^{-1} fins, vet vi.

La $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Vi kan skrive

$$\vec{u} = T(\vec{x}) \quad \text{og} \quad \vec{v} = T(\vec{y})$$

for passende $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Får da

$$\langle T^{-1}(\vec{u}), T^{-1}(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$\overset{\boxed{T \text{ ortogonal}}}{=} \langle T(\vec{x}), T(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \quad \square$$

Teorem 2

La $T : V \to V$ være en ortogonal lineærtransformasjon.

(1) Hvis λ er en egenverdi for T, så er
$$|\lambda| = 1$$

(2) Hvis $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er egenvektorer tilhørende ulike egenverdier λ_1 og λ_2 for T, så er
$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

Bevis (1) Hvis $\vec{u}$ er en egenvektor med egenverdi λ, så er
$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \overset{T \text{ orto}}{=} \langle T(\vec{u}), T(\vec{u}) \rangle$$
$$= \langle \lambda\vec{u}, \lambda\vec{u} \rangle = \lambda^2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

Så $\lambda^2 = 1$, altså $|\lambda| = 1$

(2)
$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2) \rangle$$
$$= \langle \lambda_1 \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle$$
$$= \lambda_1 \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

Så hvis ikke $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$, har vi
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

Da må enten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, eller $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, pga. (1).
I begge tilfeller er $\lambda_1 = \lambda_2$, selvmotsigelse. $\square$

Teorem 3

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon fra et indreproduktrom V til seg selv. La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for V.

Da har vi

$$T \text{ ortogonal}$$
$$\Updownarrow$$
$$\langle T(\vec{b}_i), T(\vec{b}_j) \rangle = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle \text{ for alle } i, j$$

Bevis Viste KOLA s. 652-653 $\square$

Bevis for teorem 4

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ortonormal basis for V.

$\Rightarrow$ Anta $T : V \to V$ ortogonal. Vi har

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

Siden $\mathcal{B}$ er en ortonormal basis, og

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle \overset{T \text{ ortogonal}}{=} \langle T(\vec{b}_i), T(\vec{b}_j) \rangle$$

$$\overset{\text{Teorem 13.1.3}}{=} [T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}}^T \cdot [T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}}$$

er søylene i $[T]_{\mathcal{B}}$ ortonormale. Altså er $[T]_{\mathcal{B}}$ en ortogonal matrise (beklager terminologien).

$\Leftarrow$ Anta at $[T]_{\mathcal{B}}$ er en ortogonal matrise, dvs. at den har ortonormale søylevektorer

$$[T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}} \qquad (*)$$

Vi har da

$$\langle T(\vec{b}_i), T(\vec{b}_j) \rangle \overset{\mathcal{B} \text{ ortonormal basis}}{=} [T(\vec{b}_i)]_{\mathcal{B}}^T \cdot [T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}}$$

$$\overset{\text{Fordi vi har } (*)}{=} \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \overset{\mathcal{B} \text{ ortonormal basis}}{=} \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$$

Ved teorem 3 brukt på basisen $\mathcal{B}$ følger at T er en ortogonal transformasjon. $\square$

Teorem 5

En kvadratisk matrise M er ortogonal hvis og bare hvis M er inverterbar, og

$$M^{-1} = M^T$$

Bevis Hvis $M = \begin{bmatrix} \boxed{\vec{u}_1} & \cdots & \boxed{\vec{u}_n} \end{bmatrix}$, så har vi

$$M^TM = \begin{array}{c|ccccc}
 & \boxed{\vec{u}_1} & \cdots & \boxed{\vec{u}_j} & \cdots & \boxed{\vec{u}_n} \\
\hline
\boxed{\vec{u}_1^T} & \vec{u}_1^T\cdot\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_1^T\cdot\vec{u}_j & \cdots & \vec{u}_1^T\cdot\vec{u}_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boxed{\vec{u}_j^T} & \vec{u}_j^T\cdot\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_j^T\cdot\vec{u}_j & \cdots & \vec{u}_j^T\cdot\vec{u}_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boxed{\vec{u}_n^T} & \vec{u}_n^T\cdot u_1 & \cdots & \vec{u}_n^T\cdot\vec{u}_j & \cdots & \vec{u}_n^T\cdot\vec{u}_n
\end{array}$$

Her ser vi at hvis M er en ortogonal matrise, slik at $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ er ortonormale, er $M^T \cdot M = I$. Altså er M inverterbar, og $M^{-1} = M^T$.

Omvendt, anta at M er inverterbar med $M^{-1} = M^T$. Da er $M^T M = M^{-1} M = I$, og vi ser at søylene i M må være ortonormale. □

Teorem 6

Hvis M er en ortogonal $(n \times n)$-matrise, har vi:

(1) M^T er også ortogonal

(2) $\det M = \pm 1$

Bevis (1) M ortogonal $\Leftrightarrow$ M er inverterbar og $M^{-1} = M^T$

$\Leftrightarrow M \cdot M^T = I$

$\Leftrightarrow M^T$ er inverterbar, og

$$(M^T)^{-1} = M = (M^T)^T$$

$\Leftrightarrow M^T$ er ortogonal

Teorem 5

(2) Teorem 5 gir $M^{-1} = M^T$, så

$$M^T \cdot M = I$$

Altså

$$\det(M^T M) = \det I = 1$$

Produktregelen for determinanter gir da

$$\det(M^T) \cdot \det(M) = 1$$

Men $\det(M^T) = \det(M)$ ved teorem 7.6.4.

Så $(\det M)^2 = 1$, dvs. $\det M = \pm 1$. $\square$