12.6 Egenverdier og egenrom

Definisjon

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon, og la $\vec{v} \in V$.
Hvis

$$T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{der } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ og } \lambda \in \mathbb{R}$$

kalles $\vec{v}$ en egenvektor for T med egenverdi λ.

Teorem 1

Hvis λ er en egenverdi for $T : V \to V$, så er mengden E_λ av vektorer $\vec{v} \in V$ slik at

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

et underrom av V som kalles egenrommet tilhørende egenverdien λ.

Bevis Vi har $\vec{0} \in E_\lambda$, fordi $T(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$.
Videre får vi, med $\vec{u}, \vec{v} \in E_\lambda$

$$
\begin{aligned}
T(\vec{u}+\vec{v}) &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}) && \text{(fordi } T \text{ er en lin. transf.)} \\
&= \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} && \text{(fordi } \vec{u}, \vec{v} \in E_\lambda) \\
&= \lambda(\vec{u} + \vec{v}) && \text{(regneregel for vektorrom)}
\end{aligned}
$$

Altså $\vec{u} + \vec{v} \in E_\lambda$. Hvis $r \in \mathbb{R}$, får vi

$$
\begin{aligned}
T(r\vec{u}) &= r \cdot T(\vec{u}) && \text{(fordi } T \text{ er en lin. transf.)} \\
&= r \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) && \text{(fordi } \vec{u} \in E_\lambda) \\
&= \lambda \cdot (r\vec{u}) && \text{(regneregel for vektorrom)}
\end{aligned}
$$

Altså $r\vec{u} \in E_\lambda$. Altså er E_λ et underrom av V. $\square$

Sammenheng med matriser

Anta at $T: V \to V$, der V har dimensjon n.
La $\mathcal{B}$ være en basis for V. Da har vi:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff [T(\vec{v})]_B = [\lambda \vec{v}]_B$$

(fordi koordinat-avbildningen er en isomorfi)

$$\iff [T]_B \cdot [\vec{v}]_B = \lambda \cdot [\vec{v}]_B$$

Altså: $\vec{v}$ er en egenvektor for T med egenverdi λ

$\Updownarrow$

koordinatvektoren $[\vec{v}]_B \in \mathbb{R}^n$ er en egenvektor for $(n \times n)$-matrisen

$[T]_B$ (matrisen til T i basisen $\mathcal{B}$)

med egenverdi λ.

Metode for å finne egenverdier til en matrise M

Vi har: $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\left(\text{eks. } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow M\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$ $\left(\text{eks. } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ $\left(\text{eks. } \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} M - \lambda I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\left(\text{eks. } \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

Dette er et homogent likningssystem med n likninger og n ukjente.
Det har derfor løsninger $\vec{v} \neq \vec{0}$ hviss

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Så hvis

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

blir kravet for at λ skal være en egenverdi (nødvendig betingelse)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Determinantuttrykket (1) blir et polynom
$$p(\lambda) = c_n\lambda^n + \dots + c_1\lambda^1 + c_0$$
med $c_n \neq 0$. Dette kalles det karakteristiske polynomet til matrisen M. Ved algebraens fundamentalteorem fins en faktorisering
$$p(\lambda) = c_n(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \qquad (2)$$
der røttene $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ er skrevet opp med multiplisitet, og de kan være komplekse. Disse røttene kalles de karakteristiske røttene til matrisen M. Antall ganger et tall λ_i forekommer i faktoriseringen (2), kalles den algebraiske multiplisiteten til λ_i. Dimensjonen til det tilhørende egenrommet E_{λ_i} kalles den geometriske multiplisiteten til λ_i.

Merk: Hvis λ_i er et komplekst tall, så har ikke λ_i noe egenrom når vi regner i reelle vektorrom.

eks. $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Det karakteristiske polynomet til M blir
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 0 = (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$$
$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda^2 - 3\lambda + 2}}$$

Siden $p(\lambda) = (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$, ser vi at

$\lambda_1 = 1$ har algebraisk multiplisitet 1

$\lambda_2 = 2$ —— " —— 1

Egenvektorer til $\lambda_1 = 1$:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 2a + 3b = a & \text{I} \\ 0a + 1b = b & \text{II} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{I sier } a + 3b = 0 \\ \text{dvs. } a = -3b\end{array}\right)$$

Egenvektorene er alle vektorer på formen
$$\begin{bmatrix} -3b \\ b \end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Altså er $\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en basis for egenrommet E_1 til $\lambda_1 = 1$.

Så den geometriske multiplisiteten til egenverdien $\lambda_1 = 1$, er 1.

(Tilsvarende regning for $\lambda_2 = 2$)

Teorem 2

La M være en $(n \times n)$-matrise. Da er produktet av de karakteristiske røttene til M (regnet med multiplisitet) lik $\det(M)$.
Altså
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(M)$$
med notasjonen fra (2).

Bevis Viste KOLA s. 607.