(Seksjon 12.6 forts. Lay 5.2 og 5.3)

Eks. $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ lineærtransformasjonen gitt ved

$$T(1) = 4$$
$$T(x) = 1 + 6x$$
$$T(x^2) = 4x^2 - 2x - 1$$

Finn egenverdier og basiser for egenrommene til T, og angi algebraiske og geometriske multiplisiteter for egenverdiene.

Løsn. Strategi: Velge en basis B og finne egenverdier og egenvektorer for matrisen $[T]_B$.

La $\vec{b}_1 = 1$, $\vec{b}_2 = x$, $\vec{b}_3 = x^2$, $B = \{1, x, x^2\}$

Vil finne $[T]_B$.

$$\begin{cases} T(\vec{b}_1) = T(1) = 4 = 4 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \\ T(\vec{b}_2) = T(x) = 1 + 6x = 1 \cdot \vec{b}_1 + 6 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 \\ T(\vec{b}_3) = T(x^2) = 4x^2 - 2x - 1 = (-1) \cdot \vec{b}_1 + (-2) \vec{b}_2 + 4 \cdot \vec{b}_3 \end{cases}$$

Så

$$[T]_B = \begin{bmatrix} T(\vec{b}_1) & T(\vec{b}_2) & T(\vec{b}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Egenverdier for $[T]_B$:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \overbrace{(4-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)}^{\text{det karakteristiske polynomet til } [T]_B} = 0$$

gir $\lambda_1 = 4$ (alg. multiplisitet 2)
$\lambda_2 = 6$ (— " — 1)

Dette er da egenverdiene til T også, med disse multiplisitetene.

Egenvektorer til $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 4a + b - c = 4a & \text{I} \\ 6b - 2c = 4b & \text{II} \\ 4c = 4c & \text{III} \end{cases}$$

I sier $b = c$

II sier $b = c$

III sier $0 = 0$

Løsn. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Basis for egenrommet til $[T]_B$ tilhørende $\lambda_1 = 4$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Tilsvarer basisen $\{1,\ x + x^2\}$ for egenrommet E_4 til T.

Sjekk: $T(1) = 4 = 4 \cdot 1$

$$T(x + x^2) = T(x) + T(x^2) = (\cancel{1} + 6x) + (4x^2 - 2x - \cancel{1})$$

$$= 4x + 4x^2 = 4(x + x^2) \quad \text{Stemmer!}$$

Egenvektorer til $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Løsn.} \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrommet til $[T]_B$ tilhørende $\lambda_2 = 6$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Tilsvarer basisen $\{1 + 2x\}$ for egenrommet E_6 til T.

Sjekk: $T(1 + 2x) = T(1) + 2 \cdot T(x) = 4 + 2 \cdot (1 + 6x)$

$$= 6 + 12x = 6(1 + 2x) \quad \text{Stemmer!} \quad \square$$

$\boxed{\text{12.7 Similære matriser}}$ (Lay 5.4)

La V være et n-dimensjonalt vektorrom, og la

$$T : V \to V$$

være en lineærtransformasjon, og la

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \quad \text{og} \quad B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n\}$$

være to basisor for V. Vi har da følgende situasjon:

$$\begin{tikzcd}
{[\vec{v}]_B} \arrow[d, "\text{gange med } {[T]_B}"'] \arrow[rr, bend left, "\text{Gange med } {[id]_{B' \leftarrow B}}"] & \vec{v} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "T"] & {[\vec{v}]_{B'}} \arrow[d, "\text{gange med } {[T]_{B'}}"] \\
{[T(\vec{v})]_B} & T(\vec{v}) \arrow[l] \arrow[r] & {[T(\vec{v})]_{B'}} \arrow[ll, bend left, "\text{Gange med } {[id]_{B \leftarrow B'}}"]
\end{tikzcd}$$

Altså $\quad [T]_B \cdot [\vec{v}]_B = [id]_{B \leftarrow B'} \cdot [T]_{B'} \cdot [id]_{B' \leftarrow B} \cdot [\vec{v}]_B$

Siden dette gjelder for alle $\vec{v} \in V$, får vi

$$[T]_B = [id]_{B \leftarrow B'} \cdot [T]_{B'} \cdot [id]_{B' \leftarrow B}$$

Døper vi her $P = [id]_{B \leftarrow B'}$, er $[id]_{B' \leftarrow B} = P^{-1}$. Da får vi

$$\boxed{[T]_B = P \cdot [T]_{B'} \cdot P^{-1}}$$

Generell definisjon: To $(n\times n)$-matriser M og N kalles similære hvis det fins en inverterbar matrise $(n\times n)$-matrise P slik at

$$M = P\cdot N\cdot P^{-1}$$

Merk at $M = PNP^{-1}$ gir

$$P^{-1}M = \underbrace{P^{-1}P}_{I}\, N\, P^{-1}$$

$$P^{-1}MP = N\underbrace{P^{-1}P}_{I}$$

Døper vi her $Q = P^{-1}$, står det $N = QMQ^{-1}$.

Teorem 1 To matriser M og N er similære hvis og bare hvis de kan tenkes å representere samme lineærtransformasjon, dvs. det fins vektorrom V og $T: V\to V$ og basiser B, B' for V slik at

$$[T]_B = M \quad \text{og} \quad [T]_{B'} = N$$

Bevis Har vist dette den ene veien. Andre vei: Se boken (snakket). $\square$

Teorem 2

Hvis M og N er similære $(n \times n)$-matriser, så har vi:

(1) $\det M = \det N$

(2) M og N har de samme egenverdiene

(3) M er inverterbar $\Leftrightarrow$ N er inverterbar

Bevis (1) Siden $M = PNP^{-1}$, får vi

$$\det(M) = \det(P \cdot N \cdot P^{-1})$$

Produktregelen for determinanter

$$= (\det P) \cdot (\det N) \cdot (\det(P^{-1})) \quad \text{(dette er tall!)}$$

$$= \det(N) \quad \left(\text{fordi } \det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}\right)$$

(2) Siden M og N er similære, fins ved teorem 1 et vektorrom V og en lineærtransformasjon $T: V \to V$ som M og N begge representerer. Da må egenverdiene til M og N være egenverdiene til T.

(3) Siden $\det(M) = \det(N)$ ved (1), følger at $\det(M) \neq 0$ hviss $\det(N) \neq 0$. □