7.5 og 7.6 Matriser (Lay 2.1-2.3, 3.2)

eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & 3 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 2 & 8 & 12 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{array} = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 7 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Hvis A er $(m \times n)$ og B er $(n \times k)$, så er

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{sj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \ldots + A_{in} B_{nj}$$

Teorem 7.6.2 Regler for matriseregning, f. eks.

$$(AB)C = A(BC)$$

Likningssystemer på matriseform

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$ kan skrives $$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Altså $A\vec{x} = \vec{b}$ der $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Notasjon $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $(n \times 1)$-matrise

Løsning av matriselikning (teorem 7.6.2)

La A være en $(n \times n)$-matrise, og la $\vec{x}$ og $\vec{b}$ være $(n \times 1)$-matriser. Hvis A er inverterbar, så har matriselikningen

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

med ukjent $\vec{x}$ den entydige løsningen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Bevis $A\vec{x} = \vec{b}$ gir

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\vec{x}) &= A^{-1}\vec{b} \\ (A^{-1}A)\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ I\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \qquad \square \end{aligned}$$

7.7 og 7.8 Egenverdier, egenvektorer og matrisedynamikk

(Lay 5.1, 5.6)

Hovedpoeng:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} pA + qB = \lambda A \\ rA + sB = \lambda B \end{cases}$$

$$\begin{cases} pA - \lambda A + qB = 0 \\ rA + sB - \lambda B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-\lambda)A + qB = 0 \\ rA + (s-\lambda)B = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Determinanten til koeffisientmatrisen er her

$$D = \begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ r & s-\lambda \end{vmatrix}$$

Systemet (*) har løsninger ulik $(A, B) = (0,0)$ hviss $D = 0$.

Slik finner vi egenverdiene λ. Kan så finne egenvektorene til hver løsning λ.