$\boxed{\text{13.6 Singulærverdidekomposisjon}}$ (Lay 7.4)

La A være en $(m \times n)$-matrise. En <u>singulærverdi-dekomposisjon</u> (SVD) av A er en faktorisering

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

der

U er en ortogonal $(m \times m)$-matrise (rotasjon/speiling i $\mathbb{R}^m$)

V — " — $(n \times n)$-matrise (— " — i $\mathbb{R}^n$)

Σ er en $(m \times n)$-matrise slik at $\Sigma_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$.

("innlegging" av $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$)

<u>eks. 1</u>

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Her er
$n = 4$
$m = 2$

$$= \begin{array}{cc|cccc|cccc} & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorem 1 : Hvordan finne SVD

Gitt en $(m \times n)$- matrise A.

1. Finn A^TA (Den blir symmetrisk $(n \times n)$.)

2. Finn egenverdiene til A^TA (De blir ikke-negative)
   Ordne dem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$, listet med multiplisitet.
   Regn ut $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ for alle i slik at $\lambda_i > 0$.
   Du får da singulærverdiene $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ til A.

3. Finn en ortonormal egenbasis for A^TA, der $\vec{v}_i$ tilhører λ_i.

4. For hver i slik at $\lambda_i > 0$, regn ut $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \vec{v}_i$

   Hvis $r < m$, utvid samlingen $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ til en ortonormal basis $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ for $\mathbb{R}^m$.

5. Du har nå

$$A = U \Sigma V^T$$

der $U = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_m]$, $V = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$ og Σ er $(m \times n)$-matrisen med

$$\Sigma_{ii} = \sigma_i \quad \text{for } i = 1, \dots, r$$

og $\Sigma_{ij} = 0$ for alle andre i, j.

eks. 2 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ Finn SVD for A. (2×4) - matrise

Løsn. 1

$$A^TA = \begin{array}{cc|cccc} & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline -1 & 3 & 10 & 8 & 10 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 10 & 8 & 10 \\ -1 & 3 & 10 & 8 & 10 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 10 & 8 & 10 \end{array} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 10 & 8 \\ 8 & 10 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 10 & 8 \\ 8 & 10 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

2 + 3 A^TA har (Matlab) :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 36 \quad \text{med} \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 4 \quad \text{med} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 6 \\ \sigma_2 = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right\} \text{sing. verdier for } A$$

$$\lambda_3 = 0 \quad \text{med} \quad \underbrace{\vec{V}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{V}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{vår basis for dette egenrommet var annerledes i eksempel 1.}}$$

Ortonormal egenbasis for A^TA : $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

Til punkt 5 : Vi noterer at

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4 $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Her er $r = m = 2$, trenger dermed ikke utvide)

Så $U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5 Altså $A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Bevis for teorem 1 (metoden)

Oppgave 3.6.2 : A^TA er symmetrisk, og har ikke-negative egenverdier.

Vi har

$$AV = \left[A\vec{v}_1 \cdots A\vec{v}_n\right] = \left[A\vec{v}_1 \cdots A\vec{v}_r \ A\vec{v}_{r+1} \cdots A\vec{v}_n\right]$$

$$= \left[\sigma_1\vec{u}_1 \cdots \sigma_r\vec{u}_r \ \ \vec{0} \cdots \vec{0}\right]$$

$\boxed{\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}A\vec{v}_i}$

Hvis v_i er en egenvektor for A^TA med egenverdi 0, så er $A\vec{v}_i = \vec{0}$, fordi:

$\langle A\vec{v}_i, A\vec{v}_i\rangle$
$= (A\vec{v}_i)^T \cdot A\vec{v}_i$
$= \vec{v}_i^T (A^TA\vec{v}_i)$
$= \vec{v}_i^T \cdot \vec{0} = 0$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_r & \cdots & \vec{u}_m \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \ \sigma_r\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} = U\Sigma$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1\vec{u}_1 & \cdots & \sigma_r\vec{u}_r & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \end{bmatrix}$$

V ortogonal matrise

Multiplikasjon med $V^T = V^{-1}$ på begge sider gir

$$(AV)V^T = (U\Sigma)V^T$$
$$A(VV^T) = U\Sigma V^T$$
$$\underline{\underline{A = U\Sigma V^T}}$$

Gjenstår å vise at $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ er ortonormale. Vi får

$$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle = \vec{u}_i^T\vec{u}_j \overset{(4)}{=} \left(\frac{1}{\sigma_i}A\vec{v}_i\right)^T \frac{1}{\sigma_j}A\vec{v}_j$$

$$= \vec{v}_i^T A^T \cdot \frac{1}{\sigma_i} \cdot \frac{1}{\sigma_j} A\vec{v}_j$$

$\vec{v}_j$ egenvektor for A^TA

$$= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\vec{v}_i^T\left(A^TA\cdot\vec{v}_j\right) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\vec{v}_i^T\lambda_j\vec{v}_j$$

$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$

$$= \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}\vec{v}_i^T\cdot\vec{v}_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\sigma_j\cdot\sigma_j}\langle\vec{v}_j,\vec{v}_j\rangle = 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j, \text{ fordi } \langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle = 0. \end{cases}$$

□

Spesialtilfelle: A symmetrisk $(n \times n)$-matrise

Da vet vi at A kan diagonaliseres

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

der D er diagonal med egenverdiene λ_i for A langs diagonalen, og P har en ortonormal egenbasis for A som søyler. Vi sier at A er ortogonalt diagonaliserbar.

Hvis vi bruker SVD-metoden på A, skjer dette:

- $A^T = A$, så $A^T A = A^2$
- A^2 har egenverdier $(\lambda_i)^2 \geq 0$
- Singulærverdiene til A blir altså $\sqrt{(\lambda_i)^2} = |\lambda_i|$

Dermed blir Σ i SVD lik D, bortsett evt. fra fortegnsskifte. Dette tas høyde for i $A = U \Sigma V^T$ fordi vi ikke trenger å ha $U = V$.

SVD i Matlab: $[U, S, V] = \text{svd}(A)$ gir

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T, \quad \text{der } S = \Sigma$$

eks. (Oppgave 13.6.1 ej fra KOLA, til neste uke!)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{skal finne SVD}$$

Løsn. ① $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

② $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda-6) = 0$

gir $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 0$

Singulærverdi: $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}$ (kun én singulærverdi)

③ Egenvektorer til $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 3a + 3b = 6a \\ 3a + 3b = 6b \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{Begge sier} \\ a = b \end{pmatrix}$$

Basis: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer til $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ 3a + 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{Begge sier} \\ b = -a \end{pmatrix}$$

Basis: $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

④ $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$

Må utvide $\{\vec{u}_1\}$ til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Vil ha vektorer som står vinkelrett på $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og på hverandre.

Ser at $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ fungerer.

Finner den siste:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Så vi får

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

⑤ Altså $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$, der

$$U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$