Fra gjennomgangen av eksamen H21 og H22

H21 oppgave 1

b) Vi bruker Gram-Schmidt på $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

(finner like godt en ortonormal basis)

$$\vec{m}_1 = \vec{b}_1 = (1,0,2,1)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{m}_1\|} \cdot \vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)$$

$$\vec{m}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{q}_1 = (0,6,9,6) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)$$

$$= (0,6,9,6) - (4,0,8,4) = (-4,6,1,2)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{m}_2\|} \cdot \vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{57}}(-4,6,1,2)$$

$$\vec{m}_3 = \vec{b}_3 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_3 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_2, \vec{b}_3 \rangle \vec{q}_2$$

$$= (3,7,15,6) - \frac{1}{6} \cdot 39 \cdot (1,0,2,1) - \frac{1}{57} \cdot 57 (-4,6,1,2)$$

$$= (3,7,15,6) - \frac{13}{2}(1,0,2,1) - (-4,6,1,2) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{m}_3\|} \cdot \vec{m}_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{34}}{2}} \cdot \vec{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{34}}(1,2,2,-5)$$

Ortonormal basis for Col A : $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ (ortogonal også!)

c) Gitt $\vec{b} = (11,15,-3,7)$. La $U = \text{Col}\,A$.

Vi har

$$\text{proj}_U \vec{b} = \langle \vec{q}_1, \vec{b} \rangle \vec{q}_1 + \langle \vec{q}_2, \vec{b} \rangle \vec{q}_2 + \langle \vec{q}_3, \vec{b} \rangle \vec{q}_3$$

Merk at $\langle q_3, b \rangle = 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1) + \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot 57 \cdot \frac{1}{\sqrt{57}}(-4,6,1,2)$$

$$= (2,0,4,2) + (-4,6,1,2) = \underline{(-2,6,4,4)}$$

Minste kvadraters løsninger av $A\check{x} = \vec{b}$ (dvs. $A\check{x} \approx \vec{b}$)
er gitt ved

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathrm{proj}_{u}\,\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matlab-utskriften gir at dette likningssystemet kan radreduseres til

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (x_4 \text{ fri parameter})$$

dvs.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

H22 oppgave 1a

Merk at $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{II+2\cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

Fortsatt er (søyle 2) = 2 · (søyle 1)

Denne effekten er det som gjør at radreduksjon av en matrise bevarer de lineære relasjonene mellom søylevektorene.

H22 oppgave 4a

Indreprodukt på $\mathbb{P}_2$:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

Må sjekke I1 - I4 :

I1 $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$ åpenbart (multiplikasjon av tall kommutativt)

I2 $\langle p, q+s \rangle = p(-1)(q+s)(-1) + p(0)(q+s)(0) + p(1)(q+s)(1)$

$$= p(-1)\cdot[q(-1)+s(-1)] + p(0)\cdot[q(0)+s(0)] + p(1)\cdot[q(1)+s(1)]$$

$$= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$
$$+ p(-1)s(-1) + p(0)s(0) + p(1)s(1)$$

$$= \langle p, q \rangle + \langle p, s \rangle$$

I3 $\langle p, rq \rangle = p(-1)(rq)(-1) + p(0)(rq)(0) + p(1)(rq)(1)$

$$= p(-1)\cdot r\cdot q(-1) + p(0)\cdot r\cdot q(0) + p(1)\cdot r\cdot q(1)$$

$$= r\,[p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)]$$

$$= r\,\langle p, q \rangle$$

I4 $\langle p, p \rangle = (p(-1))^2 + (p(0))^2 + (p(1))^2 \geq 0$ for alle $p \in \mathbb{P}_2$

Vi har $\langle p, p \rangle = 0 \iff p(-1) = p(0) = p(1) = 0$

$\iff p = 0$

$\boxed{\text{fordi et polynom av grad 1 eller 2 kan ha høyst 2 nullpunkter (algebraens fundamentalteorem)}}$

H22 oppgave 4b

Lager ortonormal basis for $\mathbb{P}_1$.

Utgangspunkt: $B = \{1, t\} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

Gram - Schmidt

$$\vec{m}_1 = \vec{b}_1 = 1$$

$$\|\vec{m}_1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \vec{b}_1(-1)\cdot\vec{b}_1(-1) + \vec{b}_1(0)\cdot\vec{b}_1(0) + \vec{b}_1(1)\cdot\vec{b}_1(1)$$

$$= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{m}_1\|}\vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{m}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{q}_1$$

$$\langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle = \vec{q}_1(-1)\vec{b}_2(-1) + \vec{q}_1(0)\vec{b}_2(0) + \vec{q}_1(1)\vec{b}_2(1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 = 0$$

$$\vec{m}_2 = \vec{b}_2 = t$$

$$\|\vec{m}_2\|^2 = \langle \vec{m}_2, \vec{m}_2 \rangle = \langle t, t \rangle = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{m}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}t$$

Ortonormal basis for $\mathbb{P}_1$: $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right\}$

Får nå

$$Q(p) = \text{proj}_{\mathbb{P}_1} p = \langle q_1, p\rangle q_1 + \langle q_2, p\rangle q_2 \qquad (*)$$

Med $p(t) = a + bt + ct^2$ er her $\left(q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

$$\begin{aligned}\langle q_1, p\rangle &= q_1(-1)p(-1) + q_1(0)p(0) + q_1(1)p(1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a-b+c) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot a + \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}a + \frac{2}{\sqrt{3}}c\end{aligned}$$

$$\langle q_2, p\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cancel{a}-b+\underline{c}) + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cancel{a}+b+\underline{c}) = \frac{2}{\sqrt{2}}b$$

Innsatt i $(*)$:

$$\begin{aligned}Q(p) = \text{proj}_{\mathbb{P}_1} p &= \left(\frac{3}{\sqrt{3}}a + \frac{2}{\sqrt{3}}c\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}b\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}t\\ &= \underline{\underline{\left(a + \tfrac{2}{3}c\right)\cdot 1 + b\cdot t}}\end{aligned}$$

Så $\beta_0 = \underline{\underline{a + \frac{2}{3}c}}$ og $\beta_1 = \underline{\underline{b}}$

c) Hvis 0 skal være punktet i $\mathbb{P}_1$ som ligger nærmest

$$p(t) = a + bt + ct^2,$$

så må projeksjonen Q av p på $\mathbb{P}_1$ være 0. Da må vi ha $\beta_0 = \beta_1 = 0$, dvs.

$$a + \frac{2}{3}c = 0 \quad \text{og} \quad b = 0$$

Kravet kan skrives $c = -\frac{3}{2}a$. Så løsningen er alle $p \in \mathbb{P}_2$ på formen

$$\underline{\underline{p(t) = a - \tfrac{3}{2}at^2}}, \quad \text{der } a \in \mathbb{R}.$$