12.8 Diagonalisering (Lay 5.3)

Definisjoner

- La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon. Med en egenbasis for T menes en basis for V bestående av egenvektorer for T. Hvis T har en egenbasis, kalles den diagonaliserbar.

- En $(n \times n)$-matrise M kalles diagonaliserbar hvis den er similær med en diagonal matrise, dvs. hvis det fins en $(n \times n)$-matrise P og en diagonal matrise D slik at
$$M = PDP^{-1}$$

Teorem 1 og 2

La V være et n-dimensjonalt vektorrom, og la $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon. Da:

(1) T er diagoniserbar $\Leftrightarrow$ Det fins en basis $\mathcal{B}$ for V slik at matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ er diagonaliserbar.

(2) Hvis T er diagonaliserbar og $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er en egenbasis for T, så er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

der λ_i er egenverdien til $\vec{v}_i$ for $i = 1, \dots, n$.

Bevis (1) $\Rightarrow$ Følger fra (2). $\Leftarrow$: Snakket

(2) Vi har

$$\left(1.\text{ søyle i } [T]_B\right) = [T]_B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [T]_B \cdot [\vec{v}_1]_B \quad \left(\text{fordi } B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}\right)$$

$$\boxed{\text{Siden } T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 \text{ er } [T]_B [\vec{v}_1]_B = \lambda_1 [v_1]_B}$$

$$= \lambda_1 \cdot [v_1]_B$$

$$= \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

På tilsvarende måte får vi at søyle j i matrisen $[T]_B$ blir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{for } j = 2, \dots, n. \quad \square$$

Teorem 3

La M være en $(n \times n)$-matrise, og anta at P er en inverterbar $(n \times n)$-matrise med egenvektorer for M som søyler.
Da har vi

$$M = PDP^{-1}, \quad \text{der } D \text{ er en diagonal matrise.}$$

Bevis La B være basisen for $\mathbb{R}^n$ bestående av søylene i P, og la S være standardbasis i $\mathbb{R}^n$.
Definer $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ved $T(\vec{v}) = M \cdot \vec{v}$.
Vi har da

$$\begin{aligned} M = [T]_S &= [id]_{S \leftarrow B} \cdot [T]_B \cdot [id]_{B \leftarrow S} \\ &= P \cdot [T]_B \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Men siden B er en egenbasis for T, er matrisen $[T]_B$ en diagonal matrise (teorem 2). $\square$

Teorem 4 (Et av poengene med diagonalisering)

Hvis M, P og D er $(n \times n)$-matriser slik at

$$M = PDP^{-1},$$

så er $M^k = PD^kP^{-1}$ for alle $k \geq 1$.

Bevis Induksjon på k. Opplagt sant for $k=1$.
Anta ok for $k = i$. Da:

$$
\begin{aligned}
M^{i+1} &= M^i \cdot M \\
&\overset{\text{induksjons-hypotese}}{=} (P \cdot D^i \cdot P^{-1}) \cdot M \\
&\overset{\text{Fordi det holder for } k=1}{=} (P \cdot D^i \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \\
&= P \cdot D^i \cdot \underbrace{(P^{-1} \cdot P)}_{I} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^{i+1} \cdot P^{-1}
\end{aligned}
$$

Altså ok for $k = i+1$. $\square$

Teorem 5

La M være en kvadratisk matrise, la

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

være k ulike egenverdier for M, og la

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$$

være egenvektorer til hver av egenverdiene. Da er samlingen

$$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$$

lineært uavhengig.

Bevis Anta at samlingen $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ er lineært avhengig. La $\vec{v}_r$ være den første vektoren i rekken som kan skrives som en lineærkombinasjon av tidligere vektorer i samlingen. Da har vi

$$\vec{v}_r = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_{r-1} \vec{v}_{r-1}$$

der minst en av c_j-ene er ulik 0. Dette gir

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= M\vec{v}_r - \lambda_r \vec{v}_r \\
&= M(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_{r-1}\vec{v}_{r-1}) - \lambda_r (c_1\vec{v}_1 + \dots + c_{r-1}\vec{v}_{r-1}) \\
&= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + c_{r-1}\lambda_{r-1}\vec{v}_{r-1} - c_1\lambda_r\vec{v}_1 - \dots - c_{r-1}\lambda_r\vec{v}_{r-1} \\
&= c_1(\lambda_1 - \lambda_r)\vec{v}_1 + \dots + c_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\cdot\vec{v}_{r-1}
\end{aligned}$$

Siden $\lambda_j \neq \lambda_r$ for alle $j < r$, viser dette at vektorene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r-1}$ også er lineært avhengige. Dette er i strid med at $\vec{v}_r$ skulle være den første vektoren som kan skrives som en lineærkombinasjon av de foregående. $\square$

Teorem 6

La M være en $(n \times n)$-matrise med n ulike, reelle tall som egenverdier. Da har vi:

(1) M er diagonaliserbar

(2) Du finner en egenbasis for M ved å velge en konkret egenvektor til hver egenverdi.

Bevis (2) Ved teorem 5 har M n lineært uavhengige egenvektorer.

(1) Ved (2) fins en inverterbar matrise P med egenvektorer for M som søyler. Det følger fra teorem 3 at M er diagonaliserbar. $\square$