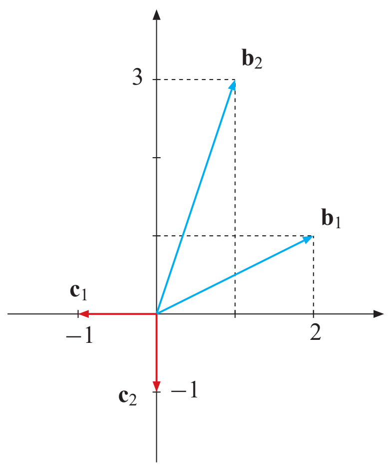
Av disse metodene er den siste likheten i (2) ofte å foretrekke i situasjoner der du i utgangspunktet kjenner koordinatvektorene

$$[\mathbf{b}_i]_S \text{ og } [\mathbf{c}_i]_S$$

til alle basisvektorene $\mathbf{b}_i$ og $\mathbf{c}_i$ fra B og C i standardbasisen S. Da er det bare å sette opp de to matrisene som har disse koordinatvektorene som søyler, invertere den ene matrisen og gange sammen.

EKSEMPEL 1 Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B}$ fra basisen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ til basisen $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$, der $\mathbf{b}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 3)$, $\mathbf{c}_1 = (-1, 0)$ og $\mathbf{c}_2 = (0, -1)$.



Figur 12.5.1 Basisen B (turkis) og basisen C (rød)

LØSNING Vi kjenner basisvektorene uttrykt i standardbasis, se figur 12.5.1. Metode 2 gir

$$\begin{aligned}[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{c}_1]_S & [\mathbf{c}_2]_S \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_S & [\mathbf{b}_2]_S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Kommentar til eksemplet Husk at

$$[\mathbf{b}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

siden $\mathbf{b}_1$ er den første vektoren i basisen B. Multipliserer du $[\mathbf{b}_1]_B$ med overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B}$ som vi fant i eksemplet, får du første søylevektor i matrisen, som er $[-2, -1]$. Dette er da koordinatvektoren til $\mathbf{b}_1$ i basisen C. Du kan se geometrisk fra figur 12.5.1 at det stemmer: Vektoren $\mathbf{b}_1$ kan uttrykkes $\mathbf{b}_1 = -2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$.

12.5 OPPGAVER

1. Betrakt $B = \{(1, 0, 1), (0, 2, 1), (-1, 1, 0)\}$ som en basis for vektorrommet $\mathbb{R}^3$.

a) Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{S\leftarrow B}$ fra B til standardbasis.

b) Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{B\leftarrow S}$ fra standardbasis til B.

2. Betrakt basisene $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ og $C = \{(2, 1), (9, 4)\}$ for $\mathbb{R}^2$. Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B}$ fra B til C.

3. La $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ og $C = \{(1, 2, 1), (2, 5, 0), (3, 3, 8)\}$. Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B}$ fra B til C.

4. Gitt basisene $B = \{1, 1+2x, 1+2x+3x^2\}$ og $C = \{1, x, x^2\}$ for rommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer med grad høyst 2. Finn overgangsmatrisen $[\mathrm{id}]_{C\leftarrow B}$ fra B til C.

komplekse vektorrom. I tilfellet reelle vektorrom definerer vi den geometriske multiplisiteten til λ_i som 0 dersom λ_i er kompleks.

TEOREM 2

Karakteriske røtter og determinanten

La M være en $(n \times n)$-matrise. Da er produktet av de karakteristiske røttene til M lik determinanten til M. I notasjonen ovenfor er altså

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det M$$

BEVIS Sammenligning av (1) og (2) med $\lambda = 0$ gir at

$$c_0 = c_n \cdot (-\lambda_1) \cdot (-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) \tag{3}$$

Videre kan vi se fra determinantuttrykket i definisjon 12.6.2 at koeffisienten c_n foran leddet λ^n i (1) alltid er $(-1)^n$; grunnen er at leddet med λ^n vil fremkomme ved multiplikasjon av alle uttrykkene $(a_{ii} - \lambda)$ nedover diagonalen, og der er n stykker av dem. Ligningen (3) inneholder n faktorer med et minustegn i, så siden $c_n = (-1)^n$, får vi

$$c_0 = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

På den annen side følger det fra (1) at $p(0) = c_0$. Men ved definisjon 12.6.2 er $p(0)$ rett og slett determinanten til M. ■

12.6 OPPGAVER

1. Finn basiser for egenrommene til matrisene i oppgave 7.7.2a og d. Angi også dimensjonene til egenrommene.

2. Finn basiser for egenrommene til matrisen i oppgave 7.7.3c. Angi også dimensjonene til egenrommene.

3. Finn det karakteristiske polynomet til

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn så alle de karakteristiske røttene til M. Verifiser at produktet av de karakteristiske røttene er lik determinanten til M.

4. La $\mathbb{P}_2$ være vektorrommet av polynomer med grad høyst 2. Definer lineærtransformasjonen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved at $T(1) = 1$, $T(x) = 4x^2 + 2x + 2$ og $T(x^2) = 2x^2 + 1$. Finn egenverdier og basiser for egenrommene til T, og angi algebraiske og geometriske multiplisiteter for egenverdiene.

5. La V være vektorrommet av C^∞ funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La $T : V \to V$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(f) = f'$. Har T noen egenvektorer? Hvis den har, så bestem alle egenverdier og egenvektorer for T.

6. La $\mathbb{P}_\infty$ være vektorrommet av alle polynomer, og la $T : \mathbb{P}_\infty \to \mathbb{P}_\infty$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(f) = f'$. Har T noen egenvektorer? Hvis den har, så bestem alle egenverdier og egenvektorer for T.

7. I denne oppgaven skal vi bevise ved induksjon at determinantuttrykket for det karakteristiske polynomet $p(\lambda)$ gitt i definisjon 12.6.2 blir et polynom av grad n i variabelen λ, som angitt i ligning (1).

a) Vis at dette holder for $n = 1$.

b) Anta at det holder for $n = k$. Vis at det da holder for $n = k+1$ også. (Hint: Løs opp determinanten etter første rad.)

La $V = \mathbb{R}^n$. Siden P er en inverterbar matrise, er søylevektorene i P en basis B' for $\mathbb{R}^n$. La $T : V \to V$ være definert som multiplikasjon med N i basisen B', altså $[T]_{B'} = N$. La S være standardbasis i $\mathbb{R}^n$. Vi har da

$$[\mathrm{id}]_{S \leftarrow B'} = P \qquad \text{og} \qquad [\mathrm{id}]_{B' \leftarrow S} = P^{-1}$$

Det følger at

$$M = PNP^{-1} = [\mathrm{id}]_{S \leftarrow B'}[T]_{B'}[\mathrm{id}]_{B' \leftarrow S} = [T]_S.$$

Døper vi $B = S$, har vi nå $M = [T]_B$ og $N = [T]_{B'}$. ■

TEOREM 2

Egenskaper ved similære matriser

La M og N være to similære $(n \times n)$-matriser. Da gjelder:

(1) M og N har samme determinant

(2) M og N har de samme egenverdiene

(3) M er inverterbar hvis og bare hvis N er inverterbar

BEVIS (1) Siden M og N er similære, fins en $(n \times n)$-matrise P slik at $M = PNP^{-1}$. Tar vi determinanten på begge sider, får vi

$$\det M = \det(PNP^{-1}) = (\det P) \cdot (\det N) \cdot (\det P^{-1})$$

Men $(\det P) \cdot (\det P^{-1}) = \det(PP^{-1}) = \det I = 1$, så resultatet følger.
(2) Siden M og N er similære, fins det ved teorem 12.7.1 et vektorrom V og en lineærtransformasjon $T : V \to V$ som de begge representerer. At M og N har de samme egenverdiene, følger dermed fra definisjon 12.6.1, som vi startet med. Egenverdiene til T er jo definert uavhengig av basis, og vi har vist at man kan finne dem ved å bestemme egenverdiene til matrisen $[T]_B$ for T i en vilkårlig basis B for vektorrommet V.
(3) Dette følger direkte fra (1). ■

12.7 OPPGAVER

1. Begrunn at hvis $T : V \to V$ er en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt vektorrom inn i seg selv, så vil alle matriser som representerer T i en eller annen basis, ha samme determinant. Den felles determinant-verdien kalles *determinanten til lineærtransformasjonen T*.

2. Vis at hvis M_1, M_2 og M_3 er kvadratiske matriser slik at M_1 er similær med M_2, og M_2 er similær med M_3, så er M_1 similær med M_3.

3. Hvilke matriser er similære med identitetsmatrisen av størrelse $(n \times n)$?

12.14 EKSTRA OPPGAVER TIL KAPITLET

1. Avgjør om den gitte mengden V av funksjoner er et vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon foregår etter de vanlige reglene $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ og $(rf)(x) = r \cdot f(x)$.

a) La $a < b$ være reelle tall. La V være mengden av funksjoner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ slik at $f(a) = f(b) = 0$.

b) La $a < b$ være reelle tall. La V være mengden av funksjoner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ slik at $f(a) = f(b) = 1$.

c) La $a < b$ være reelle tall. La V være mengden av funksjoner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ slik at $f(a) = f(b)$.

2. La V være vektorrommet av C^∞ funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, med de vanlige vektoroperasjonene for funksjoner. La $T : V \to V$ være gitt ved $T(f)(x) = -f''(x)$.

a) Begrunn at kjernen til T består av de $f \in V$ som oppfyller $f''(x) = 0$ for alle x.

b) Finn en basis B for Ker T. Hva er dimensjonen til Ker T?

c) Finn en egenvektor for T med egenverdi $\lambda = 9$.

d) Begrunn at alle reelle tall er egenverdier for T.

e) Finn alle egenvektorer for T med egenverdi 9.

f) Finn alle egenvektorer for T med egenverdi -9.

3. La V være mengden av alle C^∞ funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og la a, b, c være reelle tall, der $a \neq 0$.

a) Vis at $T : V \to V$ gitt ved

$$T(f)(x) = af''(x) + bf'(x) + f(x)$$

er en lineærtransformasjon.

b) Begrunn at Ker T består av alle $f \in V$ som løser differensialligningen $af''(x) + bf'(x) + f(x) = 0$.

c) Ker T kalles *løsningsrommet* til differensialligningen. Bruk teorem 5.9.1 til å begrunne at hvis ligningen $ax^2+bx+c = 0$ har to reelle røtter r_1 og r_2, så er $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ en basis for løsningsrommet.

d) Bruk teorem 5.9.1 til å begrunne at dersom ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ har én reell rot r, så er $\{e^{rt}, te^{rt}\}$ en basis for løsningsrommet.

e) Bruk teorem 5.9.1 til å begrunne at dersom ligningen $ax^2 + bx + c = 0$ har to komplekse røtter $r = u + iv$, så er $\{e^{ut} \cos vt, e^{ut} \sin vt\}$ en basis for løsningsrommet.

f) Hva er dimensjonen til Ker T, altså til løsningsrommet?

4. Finn et eksempel på en (2×2)-matrise som ikke har noen (reelle) egenvektorer.

5. La $\lambda > 0$ være et reelt tall, og la V være mengden av funksjoner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ som løser differensialligningen

$$f''(x) = -\lambda^2 f(x)$$

på intervallet $[a, b]$.

a) Vis at V er et vektorrom med operasjonene $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ og $(rf)(x) = r \cdot f(x)$.

b) Finn en basis B for V, og angi dimensjonen til V. (Hint: Et resultat fra kapittel 5 er relevant.)

6. La $\mathbb{P}_n$ være vektorrommet av polynomer $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med grad høyst n, og la $t_0, \ldots t_n$ være $n+1$ ulike reelle tall. Definer $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ved

$$T(p) = (p(t_0), p(t_1), \ldots, p(t_n))$$

a) Vis at T er er en injektiv lineærtransformasjon. (Hint: Anta at $T(p) = T(q)$. Da får du $T(p-q) = \mathbf{0}$. Dette viser at polynomet $p - q$ har $n+1$ ulike røtter. Er det mulig?)

b) Vis at T er en isomorfi.

c) Vis at hvis $s_0, s_1, \ldots, s_n$ er reelle tall, så fins det et entydig polynom $p \in \mathbb{P}_n$ slik at $p(t_i) = s_i$ for alle $i = 0, \ldots, n$.

Man sier at grafen til polynomet p fra c) *interpolerer* de $(n+1)$ punktene $(t_0, s_0), (t_1, s_1), \ldots, (t_n, s_n)$. I oppgave 13.10.5 skal vi se en metode for å finne dette polynomet.

7. La V være et n-dimensjonalt vektorrom, la B være en basis for V og la $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon. Vis, ved å henvise til definisjoner og teoremer i boken, at følgende utsagn alle er ekvivalente med hverandre.

(1) T er inverterbar

(2) Matrisen $[T]_B$ er inverterbar

(3) dim Ker $T = 0$

(4) Nullrommet til $[T]_B$ er $\{\mathbf{0}\}$

(5) dim Ran $T = n$

(6) Rangen til $[T]_B$ er n

(7) T er en isomorfi

(8) $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en isomorfi

(9) Søylerommet (bildet) til $[T]_B$ er $\mathbb{R}^n$

(10) Ligningen $[T]_B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(11) $[T]_B$ har ikke 0 som egenverdi

(12) Søylevektorene i $[T]_B$ er lineært uavhengige

(13) Radvektorene i $[T]_B$ er lineært uavhengige