8.4 Lineærkombinasjoner og underrom (Lay 4.1)

Definisjon

Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kalles en lineærkombinasjon av vektorene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ hvis det fins reelle tall $a_1, \dots, a_m$ slik at

$$\vec{x} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_m \vec{v}_m$$

eks. Vis at $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{bmatrix}$$

Løsn. Må vise at det fins $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{bmatrix}$$

Altså

$$\begin{cases} -a_1 + 4a_2 + \sqrt{2}\, a_3 = 5 \\ 0a_1 + 3a_2 + \pi\, a_3 = -1 \\ 2a_1 + 7a_2 + e\, a_3 = 3 \end{cases}$$

Determinanten til dette likningssystemet er

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & \pi \\ 2 & 7 & e \end{vmatrix} = -(3e - 7\pi) - 4(-2\pi) + \sqrt{2}(-6)$$
$$= -3e + 7\pi + 8\pi - 6\sqrt{2} \neq 0$$

Altså har systemet en entydig løsning (a_1, a_2, a_3).
Så $\vec{x}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$. $\square$

Definisjon

Vektorene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ kalles lineært avhengige hvis det fins tall $a_1, \dots, a_k$ der minst en av a-ene er ulik 0, slik at

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

I motsatt fall kalles vektorene lineært uavhengige.

Hvordan sjekke om vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lineært avhengige

- Sett opp likningen $a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$ og gjør om til et likningssystem med ukjente $a_1, \dots, a_k$. Vektorene er lineært avhengige hviss systemet har ikke-trivielle løsninger.

eks. Sjekk om $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$ er lineært avhengige.

Løsn.

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

gir

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

Determinanten til dette systemet er

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

Siden systemet er homogent, har vi den trivielle null-løsningen. Altså har systemet uendelig mange løsninger. Så vektorene er lineært avhengige. □

Teorem

En determinant er 0 hvis og bare hvis søylene er lineært avhengige vektorer. (Se eksemplet.)

Definisjon

La $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Mengden av alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ som kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ skrives

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

og kalles underrommet utspent av vektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

- Med dimensjonen til et underrom U av $\mathbb{R}^n$ menes det minste antallet vektorer som trengs for å spenne det ut.
- Merk at $\{\vec{0}\}$ også er et underrom, det spennes ut av $\vec{0}$. Dimensjonen til dette er definert som 0.

Teorem 2

Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige, så har underrommet utspent av dem dimensjon k.

Bevis Anta at det fins vektorer $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ som spenner ut underrommet, der $r < k$. I så fall fins tall a_{ij} slik at

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + \dots + a_{1r}\vec{u}_r \\ \vec{v}_2 = a_{21}\vec{u}_1 + \dots + a_{2r}\vec{u}_r \\ \vdots \\ \vec{v}_k = a_{k1}\vec{u}_1 + \dots + a_{kr}\vec{u}_r \end{array}\right. \qquad (*)$$

Anta nå at

$$b_1\vec{v}_1 + \dots + b_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad \text{der } b_i \in \mathbb{R}$$

Innsetting av $(*)$ gir

$$b_1(a_{11}\vec{u}_1 + \dots + a_{1r}\vec{u}_r) + \dots + b_k(a_{k1}\vec{u}_1 + \dots + a_{kr}\vec{u}_r) = \vec{0}$$

Ombytte av ledd gir

$$(a_{11}b_1 + \dots + a_{k1}b_k)\vec{u}_1 + \dots + (a_{1r}b_1 + \dots + a_{kr}b_k)\vec{u}_r = \vec{0}$$

Siden vi kan anta at $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ er lineært uavhengige, må alle parenteser i denne likningen være 0.

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}b_1 + \dots + a_{k1}b_k = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}b_1 + \dots + a_{kr}b_k = 0 \end{array}\right.$$

Dette er et homogent, lineært likningssystem med ukjente $b_1, \dots, b_k$. Systemet har r likninger, og $r < k$. Altså har det løsninger der minst en av de ukjente b_j er ulik 0.

Dermed er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lineært avhengige. Selvmotsigelse. $\square$

Teorem 3

La U, V være to underrom av $\mathbb{R}^n$ med samme dimensjon.
Hvis da $U \subseteq V$, så er $U = V$.

Bevis (Oppgave 8.13.16, til neste uke!)

Skisse:

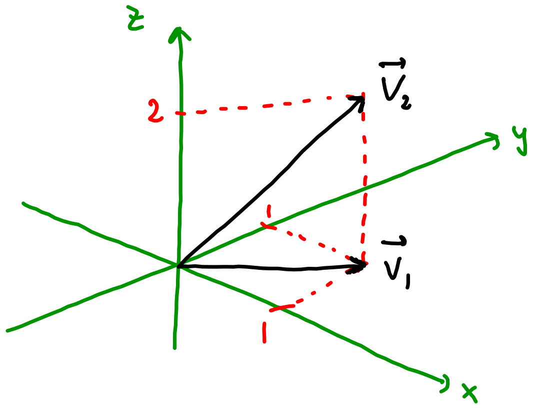
a) Hvis U er et k-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^n$, så fins det k lineært uavhengige vektorer som spenner ut U.
(Hint: Vi vet at U spennes ut av k vektorer. Hvis de er lineært avhengige, kan en av dem skrives som en lineær-kombinasjon av de andre.)

b) Se hint i oppgaven.

Definisjon

Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lineært uavhengige vektorer som spenner ut et underrom U, så kalles samlingen $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ en **basis** for U.

eks. To lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$:
$\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ og $\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$



Underrommet utspent av disse blir planet $x = y$.
Dimensjon: 2.