13.1 Indreprodukter (Lay 6.1, 6.7)

Definisjon

Et indreprodukt på et vektorrom V er en funksjon som til hvert par av vektorer $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gir et reelt tall $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ slik at følgende aksiomer er oppfylt for alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ og $r \in \mathbb{R}$:

I 1 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (kommutativt)

I 2 $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ } "lineært i 2. faktor"

I 3 $\langle \vec{u}, r\vec{v} \rangle = r \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

I 4 $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, og $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Et indreproduktrom er et vektorrom med et valgt indreprodukt.

Vi kan bevise at et indreprodukt er lineært i 1. faktor også:

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle \overset{I1}{=} \langle \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \overset{I2}{=} \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \overset{I1}{=} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\langle r\vec{u}, \vec{v} \rangle \overset{I1}{=} \langle \vec{v}, r\vec{u} \rangle \overset{I3}{=} r \cdot \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \overset{I1}{=} r \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Eks. For $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \overset{\text{def}}{=} \vec{u}^T \cdot \vec{v}$,

der vi oppfatter $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som søylevektorer, dvs. matriser med kun én søyle. Vis at $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ er et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$.

Løsn. Hvis

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

så er

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c|c} & v_1 \\ & \vdots \\ & v_n \\ \hline u_1 \ \cdots \ u_n & \end{array} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{prikkproduktet av } \vec{u} \text{ og } \vec{v})$$

Vi vet at prikkproduktet i $\mathbb{R}^n$ oppfyller I1 - I4. Altså er $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et indreprodukt. □

Definisjon La V være et indreproduktrom.

- Med normen $\|\vec{v}\|$ til $\vec{v} \in V$ menes $\|\vec{v}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$
- Med avstanden mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i V menes $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

Teorem 1

La V være et indreproduktrom, la $\vec{u}, \vec{v} \in V$ og la $r \in \mathbb{R}$. Da:

(1) $\|r\vec{u}\| = |r| \cdot \|\vec{u}\|$

(2) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwarz-ulikheten)

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Trekantulikheten)

Bevis (1)

$$\|r\vec{u}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle r\vec{u}, r\vec{u} \rangle}$$

Linearitet

$$= \sqrt{r^2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \overset{\text{regel for røtter}}{=} \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |r| \cdot \|\vec{u}\|$$

(2) og (3): Bevises akkurat som teorem 8.1.1 punkt 8 og 9 i KOLA. Evt. s. 427 Lay. $\square$

Definisjon

Med vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ i et indreproduktrom menes

$$\theta = \arccos \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Hvis $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, så kalles $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ortogonale.

Merk: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \theta = \arccos \frac{0}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \arccos 0$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{2} = 90°$$

Eks. La V være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

og definer

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

a) Vis at $\langle f, g \rangle$ er et indreprodukt på V.

b) Finn $\langle t^2, t^6 \rangle$

c) Finn avstanden mellom funksjonene $f(t) = t^2$ og $g(t) = t^6$.

d) Finn vinkelen mellom funksjonene fra c).

Løsn.

a) I1 : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt$

$$= \langle g, f \rangle$$

I2 : $\langle f, g+h \rangle = \int_0^1 f(t)\cdot(g+h)(t)\,dt$

$$= \int_0^1 f(t)\cdot\left[g(t)+h(t)\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[f(t)g(t) + f(t)h(t)\right]dt$$

regneregel for integraler

$$= \int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \int_0^1 f(t)h(t)\,dt$$

$$= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

$$\text{I3}: \langle f, rg\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot(rg)(t)\,dt \qquad (r\in\mathbb{R})$$

$$= \int_0^1 f(t)\cdot r\cdot g(t)\,dt$$

regneregel for integraler

$$= r\cdot \int_0^1 f(t)g(t)\,dt = r\cdot\langle f, g\rangle.$$

$$\text{I4}: \langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot f(t)\,dt = \int_0^1 [f(t)]^2\,dt \geq 0$$

fordi integralet av en ikke-negativ funksjon er ikke-negativt.

Videre: $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f(t)=0$ for alle $t\in[0,1]$,

dvs. f = nullfunksjonen $= \vec{0}\in V$.

b) $$\langle t^2, t^6\rangle = \int_0^1 t^2\cdot t^6\,dt = \int_0^1 t^8\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

c) Avstanden mellom t^2 og t^6 er

$$\|t^2-t^6\| = \left(\langle t^2-t^6, t^2-t^6\rangle\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 (t^2-t^6)(t^2-t^6)\,dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 (t^4-2t^8+t^{12})\,dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}+\frac{1}{13}\right)^{1/2} \approx 0{,}1939$$ (tror jeg)

d) Vi har

$$\theta = \arccos \frac{\langle t^2, t^6 \rangle}{\|t^2\| \cdot \|t^6\|}$$

Her er

$$\|t^2\| = \left(\langle t^2, t^2 \rangle\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^2 \cdot t^2 \, dt \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 t^4 \, dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|t^6\| = \left(\langle t^6, t^6 \rangle\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^6 \cdot t^6 \, dt \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 t^{12} \, dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Ved dette samt b) får vi

$$\theta = \arccos \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}} = \underline{\underline{\arccos \frac{\sqrt{65}}{9}}} \approx 26{,}4^\circ$$

Definisjon

En basis B for et indreproduktrom kalles ortogonal dersom alle basisvektorene i B er parvis ortogonale. Hvis alle basisvektorene i tillegg har norm 1, kalles basisen B ortonormal.

Teorem 2

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom V med en ortonormal basis

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$$

For alle $\vec{v} \in V$ gjelder da

$$\vec{v} = \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \vec{b}_n$$

Altså

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \end{bmatrix}$$

Bevis Siden B er en basis, fins $c_i \in \mathbb{R}$ slik at

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

Så

$$\langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle = \langle \vec{b}_1, c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n \rangle$$

$$= c_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle + \dots + c_n \langle \vec{b}_1, \vec{b}_n \rangle$$

Fordi B er en ortonormal basis

$$= c_1 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = c_1$$

Tilsvarende fås $c_i = \langle \vec{b}_i, \vec{v} \rangle$ for $i = 2, \dots, n$. □

Teorem 3

Hvis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ er en ortonormal basis for et indreproduktrom V, så er

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_B^T \cdot [\vec{v}]_B \qquad \left(\text{prikkproduktet av } [\vec{u}]_B \text{ og } [\vec{v}]_B\right)$$

for alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Bevis Teorem 2 gir

$$\vec{v} = \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \vec{b}_n$$

Så

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \langle \vec{u}, \vec{b}_1 \rangle + \dots + \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \langle \vec{u}, \vec{b}_n \rangle$$

$$= \left[\langle \vec{b}_1, \vec{u} \rangle \cdots \langle \vec{b}_n, \vec{u} \rangle\right] \cdot \begin{bmatrix} \langle \vec{b}_1, \vec{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n, \vec{v} \rangle \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Teorem 2}}{=} [\vec{u}]_B^T \cdot [\vec{v}]_B \qquad \square$$

Teorem 4

Hvis B er en ortonormal basis for indreproduktrommet V, så er

$$\|\vec{u}\| = \left|[\vec{u}]_B\right| \qquad \text{for alle } \vec{u} \in V$$

Bevis $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \overset{\text{teo 3}}{=} [\vec{u}]_B^T \cdot [\vec{u}]_B = \left|[\vec{u}]_B\right|^2$. $\square$

Teorem 5

La V være et indreproduktrom, og la $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ være en samling vektorer i V som ikke inneholder $\vec{0}$.
Hvis vektorene i S er parvis ortogonale, så er S lineært uavhengig.

Bevis Anta at vektorene i S er parvis ortogonale, og anta at $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ er slik at

$$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Vi må vise at $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Vi får

$$\langle \vec{v}_1, c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{0} \rangle$$

$$c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + c_2\underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}_{0} + \dots + c_k\underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_k \rangle}_{0} = 0$$

Cauchy-Schwartz

Så ved ortogonalitet:

$$c_1 \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + 0 + \dots + 0 = 0$$

Siden $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, gir dette $c_1 = 0$.
Tilsvarende vises at $c_i = 0$ for $i = 2, \dots, k$. $\square$

13.2 Gram-Schmidt-prosessen (Lay 6.4)

Teorem 1 (Gram-Schmidt)

La V være et indreproduktrom.

La U være et endeligdimensjonalt underrom av V.

La $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ være en basis for U.

Da kan vi konstruere en ortonormal basis

$$B' = \{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_k\}$$

for U ved hjelp av B, på følgende måte:

1. Sett $\vec{m}_1 = \vec{b}_1$ og $\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{m}_1\|} \cdot \vec{m}_1$

2. Sett $\vec{m}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{q}_1$ og $\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{m}_2\|} \cdot \vec{m}_2$

3. Sett $\vec{m}_3 = \vec{b}_3 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_3 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_2, \vec{b}_3 \rangle \vec{q}_2$

   og $\vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{m}_3\|} \cdot \vec{m}_3$

og så videre opp til $\vec{q}_k$.