8.5 Matriser som lineærtransformasjon (Lay 4.2)

En $(m \times n)$-matrise A definerer en funksjon

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

ved at $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Funksjonen T_A kalles en lineærtransformasjon.
Verdimengden til T_A kalles bildet til matrisen A.

Teorem 1 Verdimengden til T_A er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av søylevektorene i matrisen A.

Bevis Vi tar et eksempel først. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Da har vi $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, og

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Altså: Matrisen avbilder standardbasisvektorene over på søylevektorene sine. Slik blir det alltid.

Generelt: Hvis A har søylevektorene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ og $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, får vi

$$A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1 A(\vec{e}_1) + \dots + x_n A(\vec{e}_n)$$
$$= x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$$

Så bildet blir nøyaktig underrommet utspent av $v_1, \dots, v_n$. $\square$

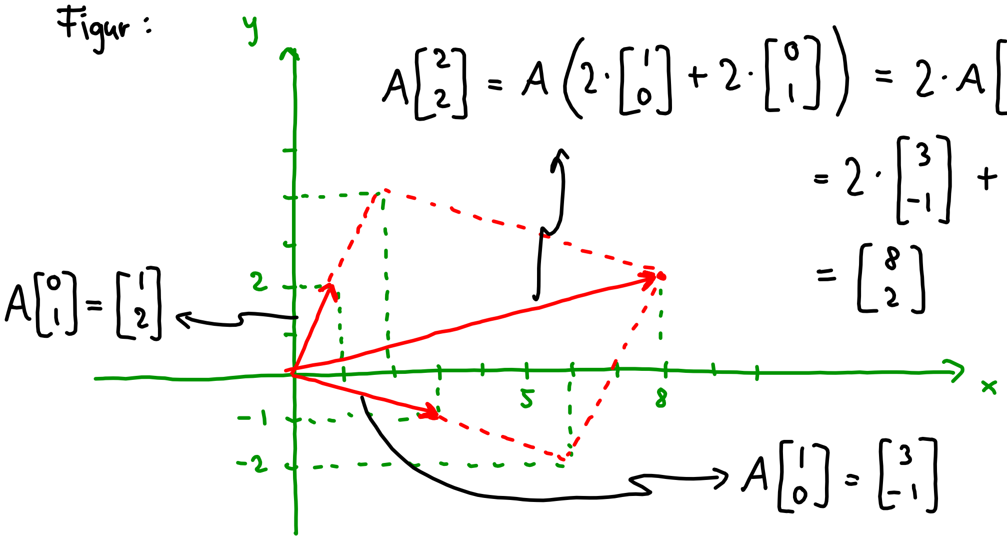
Pga. teorem 1 kalles bildet til A også for søylerommet til A, og skrives

$$\mathrm{Col}(A)$$

eks. La $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Har da $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Figur:



$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = A\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Med rangen til en matrise A menes dimensjonen til matrisens bilde, altså dimensjonen til $\operatorname{Col} A$.

Hvordan finne rangen og en basis for bildet til en gitt matrise

- La $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ være søylene i A. Løs likningssystemet
$$a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$
med hensyn på a-ene, f.eks. ved Gaussing.
- Dropp de $\vec{v}$-ene som tilsvarer frie parametre a_i. Resten av $\vec{v}$-ene blir en basis for bildet, dvs. de er lineært uavhengige og spenner ut bildet. Antallet av dem blir matrisens rang

Bevis for metoden

Hvis f.eks. a_n blir fri parameter, fins konkrete verdier av $a_1, \ldots, a_{n-1}$ slik at
$$a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{n-1}\vec{v}_{n-1} + 1\cdot\vec{v}_n = \vec{0}$$
dvs. $\vec{v}_n = -a_1\vec{v}_1 - \ldots - a_{n-1}\vec{v}_{n-1}$

Hvis noen av vektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ også tilsvarer frie parametre, kan vi her velge de tilsvarende a-ene som 0.

Altså kan alle søylevektorene i A skrives som lineærkombinasjoner av de vektorene som ikke tilsvarer frie parametre. At sistnevnte er lineært uavhengige, ser vi ved å gjenta prosessen uten de vektorene vi har kastet. $\square$

eks. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Finn en basis for Col A, og finn rangen til A.

Løsn. Følger metoden:

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + a_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ 4a_1 + a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Gauss-eliminasjon:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Altså:

$$\begin{cases} a_1 = -2a_3 - a_4 \\ a_2 = 5a_3 + 2a_4 \\ a_3 = a_3 \\ a_4 = a_4 \end{cases}$$

a_3 og a_4 frie parametre

Så $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for Col A.

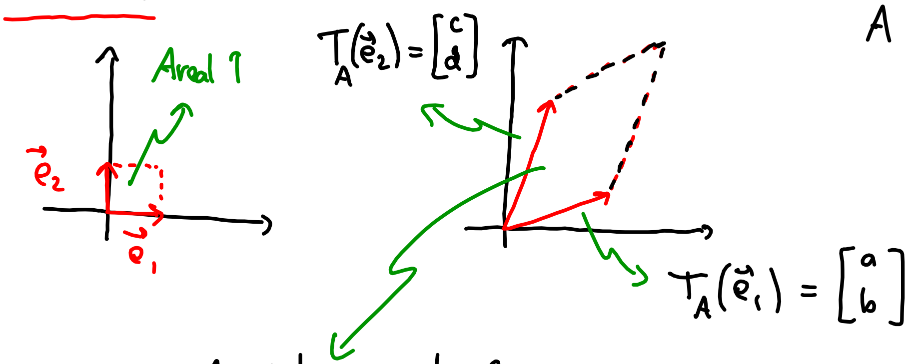
Rangen til matrisen er 2. $\square$

Determinanten som forstørrelsesfaktor

Hvis A er en $(n\times n)$-matrise, kan $|\det A|$ oppfattes som forstørrelsesfaktor for areal/volum ved avbildningen $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

For $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



Areal $|\det(A)|$ fordi dette er lengden av

$$(a,b,0)\times(c,d,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (0,0,ad-bc)$$

For $n=3$: Se tolkningen av volumproduktet (seksjon 8.3) i kombinasjon med $\det(A) = \det(A^T)$

Geometrisk tolkning av likningssystemer

Å løse $A\vec{x} = \vec{b}$ betyr å finne $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ slik at A avbilder $\vec{x}$ på vektoren $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$