12.1 Aksiomatisering av reelle vektorrom (Lay 4.1)

Definisjon Et reelt vektorrom er en mengde V av objekter kalt "vektorer" der det er definert to regneoperasjoner, nemlig <u>vektoraddisjon</u> (skrives $+$) og <u>skalarmultiplikasjon</u> (skrives som vanlig ganging, ofte med underforstått gangetegn), slik at følgende 10 aksiomer er oppfylt for alle vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ og alle skalarer (reelle tall) $r, s \in \mathbb{R}$:

A1 $\vec{u} + \vec{v} \in V$

A2 $r\vec{u} \in V$

Altså: V er <u>lukket</u> under operasjonene

A3 Det fins en nullvektor $\vec{0} \in V$ slik at
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \text{for alle } \vec{v} \in V.$$

A4 For hver $\vec{v} \in V$ fins en vektor $-\vec{v} \in V$ slik at
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

A5 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A6 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A7 $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$

A8 $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

A9 $(r+s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$

A10 $1\vec{v} = \vec{v}$

Tilleggsdefinisjon: $\vec{u} - \vec{v} \overset{\text{def}}{=} \vec{u} + (-\vec{v})$

eks.1 $V = \mathbb{R}^n$, lar addisjon og skalarmultiplikasjon være definert som før. (Definisjon 8.1.1). Da er A1–A10 oppfylt (se teorem 8.1.1). Så V er et vektorrom.

eks. 2 D ikke-tom mengde

V = mengden av alle funksjoner $f : D \to \mathbb{R}$

med $(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ for alle $x \in D$

$(rf)(x) \overset{\text{def}}{=} r \cdot f(x)$ — " —

Vi kan velge $\vec{0}$ som funksjonen $f_0 : D \to \mathbb{R}$ gitt ved

$f_0(x) = 0$ for alle $x \in D$

Vi setter så

$(-f)(x) = -f(x)$ for alle $x \in D$

Da er V et vektorrom.

eks. 3 $\mathbb{P}_n$ = mengden av alle polynomer

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

av grad høyst n, med de samme operasjonene som i eksempel 2, og $D = \mathbb{R}$.

eks. 4 $\mathbb{P}_\infty$ = mengden av alle polynomer, uansett grad.

Samme operasjoner igjen, og $D = \mathbb{R}$.

Lørdag 18. november VB/SL : "Regnedag" med prøveeksamen
ca. kl. 09 – 17 ++

Teorem 1 La V være et vektorrom. Da:

(1) Den eneste vektoren $\vec{x} \in V$ som oppfyller $\vec{v} + \vec{x} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in V$, er $\vec{x} = \vec{0}$.

(2) For $\vec{v}$ gitt, har likningen $\vec{x} + \vec{v} = \vec{0}$ den unike løsningen $\vec{x} = -\vec{v}$ i V.

(3) Hvis $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ oppfyller $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, så er $\vec{v} = \vec{w}$.

(4) For alle $\vec{v} \in V$ har vi $0\vec{v} = \vec{0}$

(5) For alle $r \in \mathbb{R}$ har vi $r\vec{0} = \vec{0}$

(6) For alle $r \in \mathbb{R}$ og $\vec{v} \in V$ har vi $(-r)\vec{v} = r(-\vec{v}) = -(r\vec{v})$

Bevis for (1) (Resten: Oppgave 12.1.9)

Anta at $\vec{y} \in V$ er slik at

$$\vec{v} + \vec{y} = \vec{v} \quad \text{for alle } \vec{v} \in V.$$

Ved å velge $\vec{v} = \vec{0}$, får vi da

$$\vec{0} + \vec{y} = \vec{0} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{A3 gir } \vec{y} + \vec{0} = \vec{y} \\ \text{A5 gir } \vec{y} + \vec{0} = \vec{0} + y \end{array}\right\} \vec{0} + \vec{y} = \vec{y}$$

Kombinert med (*) får vi $\vec{y} = \vec{0}$. $\square$

Definisjon La V være et vektorrom.

1. $\vec{v} \in V$ kalles en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ hvis det fins fall $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ slik at

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k$$

Eks. La V = mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Da er $\vec{v} = 5 \sin x - 2 \cos x + e^x$

$$= 5(\sin x) + (-2)(\cos x) + 1 \cdot (e^x)$$

er en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1 = \sin x$, $\vec{v}_2 = \cos x$, $\vec{v}_3 = e^x$

2. En samling $S \subseteq V$ av vektorer kalles lineært avhengig hvis det fins et endelig antall vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S$ og $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ med $a_i \neq 0$ for minst én i slik at

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Ellers kalles S lineært uavhengig.

Span S = mengden av $\vec{v} \in V$ som er lineærkombinasjoner av vektorer fra S.

Teorem 2 (Spennet i lukket.)

La V være et vektorrom, la $S \subseteq V$ og la $\mathcal{U} = \text{Span}\, S$.
Hvis $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{U}$ og $r \in \mathbb{R}$, så $\vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{U}$ og $r\vec{a} \in \mathcal{U}$.

Bevis La $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{U}$. Da fins $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in S$ slik at

$$\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_k\vec{v}_k \quad \text{og} \quad \vec{b} = b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_k\vec{v}_k$$

(Årsak: Utvid hver av lineærkombinasjonene for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med nuller, slik at begge uttrykkes ved de samme vektorene)

Vi får da:

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_k\vec{v}_k) + (b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_k\vec{v}_k) \\
&\overset{\boxed{A5,\, A6}}{=} (a_1\vec{v}_1 + b_1\vec{v}_1) + \ldots + (a_k\vec{v}_k + b_k\vec{v}_k) \\
&\overset{\boxed{A9}}{=} (a_1 + b_1)\vec{v}_1 + \ldots + (a_k + b_k)\vec{v}_k
\end{aligned}$$

Så $\vec{a} + \vec{b} \in \text{Span}\, S$ også. Resten: Mandag!