Eksamen MAT 1120 1. desember 2023

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $p(t_1) = s_1$ gir $c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 2$

$p(t_2) = s_2$ gir $c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 = 1$

$p(t_3) = s_3$ gir $c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3^2 = 0$

$p(t_4) = s_4$ gir $c_0 + c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 4^2 = 2$

Altså

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fra Matlab-utskiften får vi at dette systemet kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siste likning sier her $0 = 1$, så likningssystemet har ingen løsninger.

b) Vi ønsker å finne minste kvadraters løsning til $A\vec{x} \approx \vec{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi vet da fra pensum at vektoren $\vec{x}$ som minimaliserer S oppfyller

$$(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$$

Her blir

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 1 forts.)

Videre har vi

$$A^TA = \begin{array}{cccc|ccc} & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 1 & 3 & 9 \\ & & & & 1 & 4 & 16 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 10 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 30 & 100 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 30 & 100 & 354 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix}$$

Likningen $(A^TA)\vec{x} = A^T\vec{b}$ sier altså

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}}}$$

Fra Matlab-utskriften får vi at dette systemet kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.25 \\ -3.85 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Altså vil $\underline{\underline{c_0 = 5.25}}$, $\underline{\underline{c_1 = -3.85}}$ og $\underline{\underline{c_2 = 0.75}}$ minimalisere S.

Oppgave 2

a) Vi har

$$A^TA = \begin{array}{cc|ccc} & & 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ & & 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\sin\theta & 3\cos\theta & 0 & 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & 0 \\ 7\cos\theta & 7\sin\theta & 0 & 0 & 49(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 2 forts.)

Siden A^TA er en diagonal matrise, er egenverdiene elementene langs diagonalen. Egenverdiene til A^TA er altså

$$\lambda_1 = \underline{\underline{49}}, \quad \lambda_2 = \underline{\underline{9}} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = \underline{\underline{0}}$$

Singulærverdier for A: $\sigma_1 = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$, $\sigma_2 = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$ og evt. $\sigma_3 = \sqrt{0} = \underline{\underline{0}}$

(Om 0 regnes som singulærverdi er en definisjonssak. Det er vanlig å gjøre det, men vi har ikke gjort det. Begge deler ok her.)

b) Vi ser at en ortonormal egenbasis for A^TA er

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

der $\vec{v}_i$ hører til λ_i for $i = 1, 2, 3$. Videre:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Altså har vi $A = U\Sigma V^T$ der

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra SVD-en $A = U\Sigma V^T$ ser vi at avbildningen $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ kan oppfattes som en transformasjon i tre trinn:

- Først byttes første og tredje komponent på $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
- Så multipliseres første komponent med 7 og andre komponent med 3, og tredje koordinat droppes
- Til slutt roteres den resulterende vektoren en vinkel θ mot klokken i $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 3

a) At $B = \{e^x, e^{-x}\}$ spenner ut V er klart, siden V per definisjon består av funksjoner f som er lineærkombinasjoner av e^x og e^{-x}. For å vise at $\vec{b}_1 = e^x$ og $\vec{b}_2 = e^{-x}$ er lineært uavhengige, anta at

$$ae^x + be^{-x} = 0, \quad \text{der } a, b \in \mathbb{R}$$

Innsetting av $x = 0$ gir $a + b = 0$. Derivasjon på begge sider gir

$$ae^x + b(-e^{-x}) = 0$$

Innsetting av $x = 0$ gir her $a - b = 0$, dvs. $a = b$.
Kombinert med $a + b = 0$ gir dette $a = b = 0$, så e^x og e^{-x} er lineært uavhengige. Altså er B en basis for V.

b) Vi har $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ $\quad$ I

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ $\quad$ II

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} + \text{II gir} & e^x = \cosh x + \sinh x \\ \text{I} - \text{II gir} & e^{-x} = \cosh x - \sinh x \end{array}\right\} (*)$$

Altså spenner vektorene $\vec{b}_1' = \cosh x$ og $\vec{b}_2' = \sinh x$ ut V.
Siden basisen B har to vektorer, vet vi at V er todimensjonalt.
Det følger at B' er en basis for V, fordi B' har to vektorer.

Vi får

$$P = [id]_{B' \leftarrow B} = \left[[\vec{b}_1]_{B'} \; [\vec{b}_2]_{B'} \right] = \left[[e^x]_{B'} \; [e^{-x}]_{B'} \right] \overset{(*)}{=} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

(Oppgave 3 forts.)

c) Vi har

$$T(f+g) = (f+g)' = f'+g' = T(f)+T(g)$$
$$T(rf) = (rf)' = r\cdot f' = r\cdot T(f)$$

for alle $f, g \in V$ og $r \in \mathbb{R}$, ved vanlige derivasjonsregler.
Altså er T en lineærtransformasjon.

Siden en vilkårlig $f \in V$ kan skrives $f(x) = ae^{x} + be^{-x}$, har vi

$$T^2(f) = T(T(f)) = T(f') = T(ae^{x} - be^{-x})$$
$$= (ae^{x} - be^{-x})' = ae^{x} + be^{-x} = f$$

for alle $f \in V$. Altså er T^2 identitetstransformasjonen på V.
At T^2 er identitetstransformasjonen, betyr at $T^{-1} = T$.
Altså er T inverterbar.

d) Vi har

$$[T]_B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \; [T(\vec{b}_2)]_B \right] = \left[[(e^{x})']_B \; [(e^{-x})']_B \right]$$
$$= \left[[e^{x}]_B \; [-e^{-x}]_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Videre er

$$T(\vec{b}_1') = (\cosh x)' = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \sinh x = \vec{b}_2'$$
$$T(\vec{b}_2') = (\sinh x)' = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x = \vec{b}_1'$$

Så

$$[T]_{B'} = \left[[T(\vec{b}_1')]_{B'} \; [T(\vec{b}_2')]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 3 forts.)

Matrisen $[T]_B$ er diagonal, så B er en egenbasis for T, og egenverdiene til T er diagonalelementene i $[T]_B$. Egenverdiene til T er altså $\underline{\underline{1 \text{ og } -1}}$.

Matrisen $[T]_{B'}$ er ikke diagonal, så B' er ikke en egenbasis for T.

e) At dette er et indreprodukt, følger fra vanlige regneregler for matriser. For alle $f, g \in V$ og $r \in \mathbb{R}$ har vi

I1 $\langle f,g\rangle = [f]_{B'}^T [g]_{B'} = [g]_{B'}^T [f]_{B'} = \langle g,f\rangle$

I2 $\langle f,g+h\rangle = [f]_{B'}^T [g+h]_{B'} = [f]_{B'}^T \left([g]_{B'} + [h]_{B'}\right)$

$$= [f]_{B'}^T [g]_{B'} + [f]_{B'}^T [h]_{B'} = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$$

I3 $\langle f, rg\rangle = [f]_{B'}^T [rg]_{B'} = [f]_{B'}^T r [g]_{B'}$

$$= r \cdot [f]_{B'}^T [g]_{B'} = r\langle f,g\rangle$$

I4 $\langle f,f\rangle = [f]_{B'}^T [f]_B = \| [f]_{B'} \|^2$, som er ≥ 0 for alle f og lik 0 hvis og bare hvis $[f]_{B'} = \vec{0}$, dvs. $f = 0$.

Vi har $\langle \vec{b}_1', \vec{b}_2' \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$$\langle \vec{b}_1', \vec{b}_1' \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

og tilsvarende $\langle \vec{b}_2', \vec{b}_2' \rangle = 1$. Altså er B' ortonormal.

f) Fra (*) under b) har vi $e^{-x} = 1 \cdot \vec{b}_1' - 1 \cdot \vec{b}_2'$, så $[e^{-x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Videre er $[\sinh x]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så

$$\langle e^{-x}, \sinh x\rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

Hvis $\langle f,g\rangle$ er et vilkårlig indreprodukt på V slik at B' er ortonormal, får vi

$$\langle e^{-x}, \sinh x\rangle = \langle \vec{b}_1' - \vec{b}_2', \vec{b}_2' \rangle = \langle \vec{b}_1', \vec{b}_2' \rangle - \langle \vec{b}_2', \vec{b}_2' \rangle \overset{B' \text{ ortonormal}}{=} 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}$$