Fasit

med hint og løsningsforslag til

Kalkulus og lineær algebra

Arne Hole

Versjon oppdatert: 29.11.2023

Om denne samlingen

Samlingen innholder fasit alle oppgavene i boken der det finnes et entydig svar. For oppgaver der svaret ikke er entydig, er fasit som hovedregel ikke inkludert. Figurer er heller ikke vist. Til en del oppgaver er det gitt hint eller løsningsforslag.

Med forbehold om trykkfeil og regnefeil. Finner du noe som bør rettes, er det svært velkomment hvis du melder fra til arne.hole@ils.uio.no.

Seksjon 1.2

1

a) Sant

b) Sant

c) Usant

d) Sant

e) Usant

f) Sant

g) Sant

h) Sant

i) Usant (den tomme mengden er et objekt, og dette objektet ikke et element i A)

2

a) $\{1, 3, 4, 6, 7\}$

b) $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

3 $R \cap S = \{3, 5, 7\}$, $R \cup S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $R \setminus S = \{1\}$, $S \setminus R = \{9\}$.

Seksjon 1.3

1

a) $(2, 5]$

b) $(-\infty, 10]$

2 $\inf U = 3$,
$\sup U = 12$

3 Hint: Anta at x er en øvre begrensning for U. Forklar hvorfor x da også er en øvre begrensning for $U \cap V$.

4

a) U er en omegn om 2, men ikke om 10.

b) $U^* = (0, 9) \cup (10, 12)$, $\mathbb{R} \setminus U = (-\infty, 0) \cup [9, 10] \cup [12, \infty)$, $\partial U = \{0, 9, 10, 12\}$, $\overline{U} = [0, 9] \cup [10, 12]$. U er hverken åpen eller lukket.

5 $U = (0, 1)$ har 0 som opphopningspunkt. Mengden $\{0\} \cup (1, 2)$ har 0 som isolert punkt.

Seksjon 1.4

$\boxed{1}$

a) $517/16 = 32.3125$

b) $125/36$

$\boxed{2}$

a) $\dfrac{x^3 - x^2}{2 + x}$

b) $\dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 2}$

c) $x^4 - y$

d) x

e) $\dfrac{x + 1}{x^2}$

f) $\dfrac{5x - 8}{x}$

g) $\dfrac{1}{x}$

h) $\dfrac{a - b}{a}$

$\boxed{3}$

a) $\dfrac{x^2 + xy}{1 + x}$

b) x

c) $\dfrac{1}{x(x - 1)}$

d) Kan ikke forenkles vesentlig

e) x

f) $\dfrac{a}{gie}$

g) -27

h) $\dfrac{\mathrm{Dt}^2\mathrm{e} - \mathrm{r} - \mathrm{g}^2\mathrm{entli}}{\mathrm{bar} - \mathrm{slud}^2\mathrm{r}}$

$\boxed{4}$

a) $\dfrac{1 + x^4}{x^4}$

b) $x^2 + ax^2$

c) $x^2 + x^3 + 5x$

d) $-18a - 8$

e) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

f) $\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

$\boxed{5}$

a) x

b) x^4

c) 1

d) 16^{-8}

$\boxed{6}$

a) $x^2 + 8x + 15$

b) $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$

c) $y^2 - 9$

d) $x^3 - x + 2x^2 - 2$

$\boxed{7}$ Svaret blir $\frac{1}{2}(2x+8) - x = 4$

$\boxed{8}$

a) 2,3,4,3,3,3

b) $6 \cdot 10^2$

c) $6.0 \cdot 10^2$

$\boxed{8}$ 189

$\boxed{9}$ 16 m^2

$\boxed{10}$ $8.7 \cdot 10^2$ med to gjeldende, $9 \cdot 10^3$ med ett

$\boxed{11}$ 120 000 kg

Seksjon 1.5

$\boxed{1}$

a) Usant

b) Sant

c) Usant

d) Usant

e) Sant

f) Sant

Seksjon 1.6

$\boxed{1}$ $12/7 = 1.714285714...$

$\boxed{2}$ $23222/9900$

$\boxed{3}$

a) 408/99

b) $a = -77993434/999900$

$\boxed{9}$

a) $\mathbb{N}$ lister seg selv. For $\mathbb{Z}$ kan vi lage listen $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

b) Vi grupper brøkene etter summen av absoluttverdiene til teller og nevner. Først lister vi opp alle brøkene med sum 1, så de med sum 2, og så videre. Liste: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}$, osv.

c) Hint: Anta at du har en liste over alle reelle tall. Konstruer et tall d ved å velge desimal nummer n i d ulikt desimal nummer n i tall nummer n på listen. Tallet d kan ikke være det første tallet på listen, fordi første desimal ikke stemmer. Men d kan heller ikke være tall nummer to på listen, fordi andre desimal ikke stemmer. Og så videre.

Seksjon 1.7

$\boxed{1}$

a) 8 og -8

b) 10

c) 5

d) -5

$\boxed{2}$ $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\sqrt[3]{10} \approx 2.1544$

$\boxed{4}$ 0

Seksjon 1.8

$\boxed{1}$

a) $x^2 + 2$

b) $x^2 - x + 1$

c) $x^2 + 3$

$\boxed{2}$ $x^3 + 2x + 1$, vi får $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 9x + 4 = (x^3 + 2x + 1) \cdot (x + 4)$

$\boxed{3}$ $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3$

$\boxed{4}$

a) Går ikke opp, $(x^2 - 2x + 1)/(x + 1) = x - 3 + 4/(x + 1)$

b) $x - 3$

c) Går ikke opp, $(x^7 + x^6 - 1)/(x + 1) = x^6 - 1/(x + 1)$

d) Går ikke opp, $(2x^3 + 4x)/(x^2 + 1) = 2x + 2x/(x^2 + 1)$

Seksjon 1.9

$\boxed{1}$

a) $x = 4$

b) $x = -15/4$

c) $x = 3, x = 2$

d) Ingen løsning

e) $x = 0, x = 5$

f) $x = 7$

g) $x = t, x = -1$

h) $x = (-a - t^2)/(kt)$

i) $x = 5, x = -1$

j) $x = 5, x = 10$

$\boxed{2}$ $x = 1, x = 4, x = -5$

Seksjon 1.11

$\boxed{5}$ $y = x + 1$, skjæringspunkter $(0, 1)$ og $(-1, 0)$

$\boxed{6}$ $y = x + 5$

$\boxed{7}$ Vinkelrett

$\boxed{8}$ Skjæringspunkt $(3, -2)$

$\boxed{9}$ Avstand $\sqrt{170}$, nærmest origo $(5, 6)$

$\boxed{10}$ 5

$\boxed{11}$ $x \approx 281$ meter

$\boxed{12}$ 20

$\boxed{13}$ 12

$\boxed{14}$ $\sqrt{84}$

Seksjon 1.12

$\boxed{1}$

a) 364

b) 10

c) 142

d) -2

$\boxed{2}$ $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5$

$\boxed{3}$ $\sum_{i=3}^{6} 4^i$

$\boxed{6}$ $\sum_{k=2}^{8} 4(k-2)^2$, $\sum_{k=2}^{11} 1$, $\sum_{k=2}^{5}(5(k-1)^2 - 2)$ og $\sum_{k=2}^{3} 2(k-3)$

Seksjon 1.13

$\boxed{1}$ 84

$\boxed{2}$ 24

$\boxed{3}$ 720

$\boxed{4}$ 504

$\boxed{5}$ 12271512

$\boxed{7}$ 1024

$\boxed{8}$ 100^{490000}

$\boxed{9}$ 2598960

$\boxed{10}$

b) 77520 ganger prisen for en enkeltrekke

Seksjon 1.14

$\boxed{1}$

a) $2/3$

b) $2/3$

$\boxed{2}$

a) 36. Ja

b) 25 utfall. Sannsynlighet $25/36$

c) 11 utfall. Sannsynlighet $11/36$

$\boxed{3}$

a) 216

b) $91/216 \approx 0.42$

$\boxed{4}$

a) 45

b) 15

c) $15/45 = 1/3$

$\boxed{5}$ 2628000 flyturer. Sannsynligheten for kræsj er $1/2628000$. Denne er omtrent dobbelt så stor som sannsynligheten for å vinne på en enkeltrekke i Lotto.

$\boxed{6}$ $1/2598960$

Seksjon 1.15

$\boxed{1}$ $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$\boxed{2}$ $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

$\boxed{3}$ $(3y-4)^5 = 243y^5 - 1620y^4 + 4320y^3 - 5760y^2 + 3840y - 1024$, og $(1+\sqrt{7})^7 = 4264 + 1624\sqrt{7}$

$\boxed{4}$ 1184040

$\boxed{6}$ Antall delmengder er 2^n. Tolkning: Antall delmengder med i elementer er $\binom{n}{i}$

Seksjon 1.16

$\boxed{1}$

a) ≈ 272988

b) $2^{31} - 1$

c) $\frac{2}{3}(1-(1/2)^{10}) \approx 0.6660156$

$\boxed{2}$

a) $t^5(1-t^{2k+2})/(1-t^2)$

b) $2^{n+1} - 1$

Seksjon 1.17

$\boxed{1}$

a) Lukket

b) Åpen

c) Åpen

$\boxed{2}$ 250

$\boxed{4}$

a) $y = (7/2) - (1/2)x$

b) $y = 2x + 1$

$\boxed{5}$ -28

$\boxed{6}$

a) 0.375

b) ≈ -0.2727

c) 115

d) $p/100$

$\boxed{7}$

a) $660 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

$\boxed{9}$ $\frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{11}{49} \cdot \frac{10}{48}$

$\boxed{10}$

a) $40/2598960 \approx 0.0000154$

b) $(\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49}) \cdot 5 \approx 0.00024$

Seksjon 2.1

$\boxed{3}$ $f(1) = 2$, $f(100) = 1.01$. Når x blir større, nærmer funksjonsverdiene $f(x)$ seg 1 mer og mer

$\boxed{4}$ Grafen hopper opp og ned mellom 0 og 1, men hoppene ligger uendelig tett. Dermed vil grafen for vårt øye se ut som de to horisontale linjene $y = 0$ og $y = 1$

Seksjon 2.2

$\boxed{1}$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ Følgen konvergerer mot 0

$\boxed{3}$

a) Konvergerer mot 0

b) Konvergerer mot 2

c) Divergerer

d) Konvergerer mot 0

$\boxed{4}$

d) -5

$\boxed{5}$

c) $\{\frac{m}{m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ og $\{\frac{-m}{m+1}\}_{m=1}^{\infty}$

Seksjon 2.3

$\boxed{1}$

a) $f(0.1) = 10$, $f(0.001) = 1000$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) $f(10) = 0.1$, $f(100) = 0.01$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

$\boxed{4}$

a) $x = 10002$

b) $x = B^2 + 2$

c) $A = B^2 + 2$

$\boxed{6}$

a) For hvert tall $\varepsilon > 0$ fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x < A$ medfører $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) For hvert tall B fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x > A$ medfører $f(x) < B$.

c) For hvert tall B fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x < A$ medfører $f(x) < B$.

d) For hvert tall B fins et tall $\delta > 0$ slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $|x - a| < \delta$ medfører $f(x) < B$.

Seksjon 2.4

$\boxed{1}$

a) -11

b) 5

c) -1

d) $-\infty$

e) 1

f) 5

g) $-\infty$

h) ∞

$\boxed{2}$

a) Begge grensene er 1

b) Ja

$\boxed{3}$

a) Vertikal asymptote $x = 5$, horisontal asymptote $y = 3$.

b) Vertikal asymptote $x = 0$, horisontal asymptote $y = 0$.

$\boxed{4}$ a) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{5}\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ g) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ h) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\boxed{5}$

a) $(k - x_0)/(m_0^2 + 1)^3$

b) $-t^2$

$\boxed{6}$ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 2.5$

Seksjon 2.6

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 89x^{88}$

b) $f'(x) = 5$

c) $f'(x) = -10/x^3$

d) $f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3}$

e) $f'(x) = (2x(x^3 + 1) - x^2 \cdot 3x^2)/(x^3 + 1)^2$

f) $f'(x) = -2(x - 1)^{-2}$

$\boxed{2}$

a) $f'(x) = (2x + 1)(1 + x^3 + x^6) + (x^2 + x + 1)(3x^2 + 6x^5)$

b) $f'(x) = (7x^6 + x^{-2})(x^7 + x^3 + 2) + (x^7 + x^{-1})(7x^6 + 3x^2)$

$\boxed{3}$ a) $u(x) = 1 + 2x$, $u'(x) = 2$ b) $g(u) = u^9$ c) $g'(u) = 9u^8$, $g'(u(x)) = 9(1 + 2x)^8$ d) $f'(x) = 18(1 + 2x)^8$

$\boxed{4}$ a) $u(x) = x^2 + 5x + 3$, $u'(x) = 2x + 5$ $g(u) = u^7$ c) $g'(u) = 7u^6$, $g'(u(x)) = 7(x^2 + 5x + 3)^6$ d) $f'(x) = 7(x^2 + 5x + 3)^6 \cdot (2x + 5)$

$\boxed{5}$ a) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ b) $g(u) = u^{70}$ c) $g'(u) = 70u^{69}$, $g'(u(x)) = 70(x^2 + 1)^{69}$ d) $f'(x) = 140x(x^2 + 1)^{69}$

$\boxed{6}$ $u(x) = 1 + x$, $u'(x) = 1$ b) $g(u) = u^{17}$ $g'(u) = 17u^{16}$, $g'(u(x)) = 17(1 + x)^{16}$ d) $f'(x) = 17(1 + x)^{16}$

$\boxed{7}$

a) $f'(x) = (x + 2)^{12} + 12(x + 1)(x + 2)^{11} - 2/x^2$

b) $f'(x) = (x^2 + 1)^9 + 18x^2(x^2 + 1)$

c) $g'(x) = [8x^7(x^2 + x^3) - (x^8 - 2)(2x + 3x^2)]/(x^2 + x^3)^2 - (1 + 4x^3)/(x + x^4)^2$

d) $h'(x) = 8[(x^2 + 1)^{11} + x^4]^7 \cdot [22x(x^2 + 1)^{10} + 4x^3]$

$\boxed{8}$ $f'(x) = 2x$

Seksjon 2.7

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

b) Nullpunkter: $x = 2$ og $x = -1$. Får $f'(x) = (6x + 6)(x - 2)$.

c) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[2, \infty)$, avtar på $[-1, 2]$.

d) Lokalt maksimumspunkt $x = -1$, lokalt minimumspunkt $x = 2$. Har $f(-1) = 7$, og $f(2) = -20$.

$\boxed{2}$ Lengde 20 meter, bredde 10 meter.

$\boxed{3}$ Skrue bør velge bredden $x \approx 126,5$ m.

$\boxed{4}$

a) Bruk Rolles teorem på funksjonen $g(x) = f(x) - f(0)$, eller middelverdisetningen.

b) Middelverdisetningen med $b = 1$, $a = 0$.

Seksjon 2.8

$\boxed{1}$ 1.80219

$\boxed{2}$ -0.56714

Seksjon 2.9

$\boxed{1}$ a) 0 b) Avtar på $(-\infty, 0]$, vokser på $[0, \infty)$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = 0$. c) Konveks på hele $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ a) 2 og -2 b) Avtar på $[-3, 0]$, vokser på $[0, 2]$. Globalt maksimum $x = -3$. Maksimumsverdi $f(-3) = 5$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = -4$. Lokalt maksimum $x = 2$. Lokal maksimumsverdi $f(2) = 0$ c) Konveks på hele $[-3, 2]$.

$\boxed{3}$ a) 0 b) Voksende på hele $\mathbb{R}$ c) Konkav på $(-\infty, 0]$, konveks på $[0, \infty)$. Vendepunkt $x = 0$.

$\boxed{4}$ a) 0 b) Avtar på $[-2, 0]$, vokser på $[0, 2)$. Globalt maksimum $x = -2$. Maksimumsverdi $f(-2) = 16$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = 0$. c) Konveks på hele $[-2, 2)$.

$\boxed{5}$ a) 0 og 6 b) Avtar på $(-\infty, 3]$, vokser på $[3, \infty)$. Globalt minimum $x = 3$. Minimumsverdi $f(3) = -9$ c) Konveks på hele $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ a) 0 b) Vokser på $(-\infty, 2]$ og $[4, \infty)$, avtar på $[2, 4]$. Lokalt maksimum $x = 2$. Lokal maksimumsverdi $f(2) = 20$. Lokalt minimum $x = 4$. Lokal minimumsverdi $f(4) = 16$ c) Konkav på $(-\infty, 3]$, konveks på $[3, \infty)$. Vendepunkt $x = 3$.

$\boxed{7}$ a) 1 b) Avtar på $(-\infty, 1]$, vokser på $[1, \infty)$. Globalt minimum $x = 1$. Global minimumsverdi $f(1) = 0$

$\boxed{8}$ a) 0 og -1 b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[-\frac{1}{2}, \infty)$, avtar på $[-1, -\frac{1}{2}]$. Lokalt maksimum $x = -1$. Lokal maksimumsverdi $f(-1) = 0$. Lokalt minimum $x = -\frac{1}{2}$. Lokal minimumsverdi $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ c) Konkav på $(-\infty, -1]$, konveks på $[-1, \infty)$. Vendepunkt $x = -1$.

Seksjon 2.10

$\boxed{1}$

a) $2x$

b) $9(5t + t^3)^8(5 + 3t^2)$

c) $2at + 3t^2$

d) t^2

e) $2ay + xk$

f) gt

g) $6a_0(a_0x + \phi)^5$

h) $4x$

$\boxed{2}$ $2xyzta + tvp^2$ og $2tvxp$

$\boxed{3}$

a) $12x^2(x^3 + 2)^3$

b) $12(x^4 + 4x)^{11}(4x^3 + 4)$

c) $(x^{-1} + 3)x^{-2}$

d) $10(ax^2 + bx + c)^9(2ax + b)$

Seksjon 2.11

$\boxed{1}$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

b) $f'(x) < 0$ på hele D_f, så f er strengt avtakende. Dermed er den injektiv, og har en invers funksjon. $V_f = (3, \infty)$

c) $f^{-1}(x) = 1/(x - 3)$, $D_{f^{-1}} = V_f = (3, \infty)$, $V_{f^{-1}} = D_f = (0, \infty)$

d) $\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = 0$

$\boxed{2}$ $f(1) = 6$, og $(f^{-1})'(6) = 1/12$

$\boxed{3}$

a) $x = 1$

b) Avtar på $(1, 4/3]$, vokser på $[4/3, \infty)$. Globalt minimumspunkt $x = 4/3$. Global minimumsverdi $f(4/3) = 1 + (16/9)\sqrt{3} \approx 4.08$

Seksjon 2.12

1

a) $s(1) = 4.9$, $s(2) = 19.6$ (m/s), dvs. har falt 4.9 m etter 1 sekund, og 19.6 m etter 2 sekunder

b) $v(t) = s'(t) = gt$. Farten er 9.8 m/s etter 1 sekund, og 19.6 m/s etter 2 sekunder

c) $a(t) = s''(t) = g$

d) Tid: ≈ 1 sek. Fart: ≈ 10 m/s

e) 14 m/s

Seksjon 2.13

1

a) 180°

b) 90°

c) 120°

d) -60°

e) 45°

f) $\approx 57.3^\circ$

2 Den tredje vinkelen er 60°. De to andre sidelengdene er 1 og $\sqrt{3}$

3 To og en halv omdreining

4

a) $-\pi/6$

b) $-3\pi/4$

c) 4π

d) ≈ 0.175

e) ≈ 0.0175

f) ≈ 0.055

5

a) $\sqrt{3}/2$ og $1/2$

b) $\sin 30^\circ = 1/2$ og $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$

6 $\sin 13^\circ \approx 0.225$, $\cos 78^\circ \approx 0.208$

7 $\approx 70.53^\circ$.

8 Vinklene er 45°, 45° og 90°. Katetene har lengde $d = 5/\sqrt{2}$.

Seksjon 2.14

$\boxed{1}$

a) $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

b) $\cos(\pi/3) = 1/2$, og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

c) $\cos(5\pi/4) = -1/\sqrt{2} = \sin(5\pi/4)$

$\boxed{2}$

a) $f'(x) = \cos(2x^2) \cdot 4x$

b) $f'(x) = 10(\cos x)^9(-\sin x)$

c) $f'(x) = -1/(\sin^2 x)$

d) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Seksjon 2.15

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = \tan x + x/(\cos^2 x)$

b) $f'(x) = 2x/(\cos^2(x^2))$

$\boxed{2}$ $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

$\boxed{3}$

b) $\theta = 60^\circ$ gir minst total veilengde. Kryssløsningen er best når $b > (a\sqrt{3})/2$

Seksjon 2.16

$\boxed{1}$ $\theta = \arctan(2/3) \approx 33.69^\circ$

$\boxed{2}$

a) $\pi/4$

b) $\pi/6$

c) $2\pi/3$

d) $-\pi/6$

$\boxed{3}$

a) $f'(x) = -x^{-2}(1 - (1/x)^2)^{-1/2}$

b) $f'(x) = 2x/(1 + (x^2)^2)$

$\boxed{4}$

a) $\arctan x + \frac{x}{1+x^2}$

b) $-\pi/2$ og $\pi/2$

$\boxed{4}$ $A_b = 2\arctan b$, og $\lim_{b\to\infty} A_b = \pi$

$\boxed{5}$ Kun $x = 0$. For hvis $f(x) = 2x - \arctan x$, har vi $f(0) = 0$ og $f'(x) \geq 1$ for alle x

$\boxed{6}$ $(m_0/k)\arcsin(kx) + C$

$\boxed{7}$

a) Nullpunkt $x = 0$. Asymptote $y = \pi/2$

b) Voksende på hele intervallet $[-1, \infty)$.

$\boxed{8}$

b) $y = 0$

Seksjon 2.17

$\boxed{1}$ Areal $15/4$. Siste side blir $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$

$\boxed{3}$ ≈ 25.7 meter

Seksjon 2.18

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 5e^{5x}$

b) $f'(x) = (4x^3 + 2x)/(x^4 + x^2)$

c) $f'(x) = e^{x^2+2x}(2x + 2)$

d) $f'(x) = e^{(\ln 10)x} \cdot (\ln 10) = 10^x \ln 10$

e) $f'(x) = 1/(x \ln 5)$

f) $f'(x) = e^x \ln((x + 1)/(x^2 + 1)) + e^x(x^2 + 1)(-x^2 - 2x + 1)(x + 1)^{-1}(x^2 + 1)^{-2}$

$\boxed{2}$

a) $x = \ln 4$

b) $x = \frac{1}{3}\ln(2/5)$

c) $x = \ln(4/5)/(\ln 10)$

d) $x = 995/2$

$\boxed{3}$ $e^x + \ln|x| + C$

$\boxed{4}$

a) $C(1.25) \approx 2.862$ (kg)

b) Omtrent 14 år.

$\boxed{5}$

a) $x = 0$

b) Vokser på $(-\infty, 1]$, avtar på $[1, \infty)$. Makspunkt $x = 1$

c) Konkav på $(-\infty, 2]$, konveks på $[2, \infty)$. Vendepunkt $x = 2$.

$\boxed{6}$ a) $x = 0$ b) Avtar på $(-1, -1/5]$ og vokser på $[-1/5, 1/5]$. Globalt minimumspunkt $x = -1/5$. Minimumsverdi: $f(-1/5) = -e^2/5$. Globalt maksimumspunkt $x = 1/5$. Maksimumsverdi $f(1/5) = (e^4)/5$ c) Konkav på $(-1, -2/5]$, konveks på $[-2/5, 1/5]$. Vendepunkt $x = -2/5$

7 a) $x = 0$ b) Avtar på $(-1, -1/a]$ og vokser på $[-1/a, 1/a]$. Globalt minimumspunkt $x = -1/a$. Minimumsverdi: $f(-1/a) = -e^2/a$. Globalt maksimumspunkt $x = 1/a$. Maksimumsverdi $f(1/a) = e^4/a$ c) Konkav på $(-1, -2/a]$, konveks på $[-2/a, 1/a]$. Vendepunkt $x = -2/a$

8

a) $f'(x) = f(x) \cdot [3/(2x) + 5/(2+2x) + 14x/(2+2x^2)]$

b) $f'(x) = f(x) \cdot [2/x + \cos x/(2\sin x)]$

Seksjon 2.19

1

a) $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

c) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+5)^{-1/2} \cdot 4x$

e) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

f) $f(x) = e^{x \ln x}$ gir at $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$

Seksjon 2.20

1

a) $f'(x) = 2\cosh x \sinh x = \sinh 2x$

b) $f'(x) = \tanh x + x/(\cosh^2 x)$

c) $g'(x) = \frac{1}{2}\sinh x(\cosh x)^{-1/2}$

d) $h'(x) = 5\cosh(5x)$

5

a) Fasiten gis av figuren i boken

b) Fasiten gis av figuren i boken

c) Fasiten gis av figuren i boken

d) Fasiten gis av figuren i boken

Seksjon 2.21

1

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+x)^{-1/2}$

b) $\psi'(t) = 3(\operatorname{artanh} t)^2/(1-t^2)$

7

a) $x = \ln(\sqrt{5}-2)$ og $x = \ln(3+\sqrt{10})$

b) $x = \pm\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Seksjon 2.22

$\boxed{1}$

a) $1/2$

b) $1/2$

c) $+\infty$

d) 0

e) 0

f) 3

g) $-1/6$

h) 0

i) 1

j) 1

k) e

l) 1

$\boxed{2}$

a) 0

b) 0

c) 0

d) $+\infty$

$\boxed{3}$

a) 0

b) 0

Seksjon 2.23

$\boxed{2}$

a) $K = 1/2$

Seksjon 2.24

$\boxed{1}$ a) Vokser på $(-\infty, 0)$ og $[3, \infty)$, avtar på $(0, 3]$. Nullpunkt $x = 0$ b) $x = 0$, $y = x - 3$

$\boxed{2}$ a) Vokser på $(-\infty, 0]$ og $[6, \infty)$, avtar på $[0, 3)$ og $(3, 6]$ b) $x = 3$, $y = x + 3$

$\boxed{3}$ a) Vokser på $(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{3}]$ og $[\frac{1}{2}\sqrt{3}, \infty)$, avtar på $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1)$ og $(-1, 1)$ og $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$. Nullpunkt $x = 0$ b) $x = \pm 1$, $y = x$

$\boxed{4}$

a) Ingen

b) Ingen

c) $y = x$

d) $y = x$

e) $y = 2x + 5/2$

Seksjon 2.25

$\boxed{1}$ $4/\sqrt{3}$ m/s ≈ 2.3 m/s

$\boxed{2}$ $3\sqrt{3}$ m/s

Seksjon 2.28

$\boxed{1}$ a) Ingen b) $x = 0$, $y = 0$ c) Avtar på $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$ d) Konkav på $(-\infty, 0)$, konveks på $(0, \infty)$

$\boxed{2}$ a) Ingen b) $x = 5$, $y = 0$ c) Avtar på $(-\infty, 5)$ og $(5, \infty)$ d) Konkav på $(-\infty, 5)$, konveks på $(5, \infty)$

$\boxed{3}$ a) 0 b) $x = -7$, $y = 1$ c) Vokser på $(-\infty, -7)$ og $(-7, \infty)$ d) Konveks på $(-\infty, -7)$, konkav på $(-7, \infty)$

$\boxed{4}$ a) 0 b) $x = 3$, $y = 1$, $y = -1$ c) Vokser på $(-\infty, 0]$, avtar på $[0, 3)$ og $(3, \infty)$. Lokalt maksimumspunkt $x = 0$. Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$ d) Konveks på $(-\infty, 0]$ og $(3, \infty)$, konkav på $[0, 3)$. Vendepunkt $x = 0$.

$\boxed{5}$ $x = 120$ meter

$\boxed{6}$

a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

b) Vokser på $(-\infty, -2)$ og $(-2, 0]$, avtar på $[0, 2)$ og $(2, \infty)$. Lokalt maksimum $x = 0$. Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$

c) Konveks på $(-\infty, -2)$ og $(2, \infty)$, konkav på $(-2, 2)$

$\boxed{7}$

a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

b) Vokser på $(-\infty, -a)$ og $(-a, 0]$, avtar på $[0, a)$ og (a, ∞). Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$

c) Konveks på $(-\infty, -a)$ og (a, ∞), konkav på $(-a, a)$

$\boxed{8}$ Den måler hvordan krumningen til grafen endrer seg som funksjon av x

$\boxed{9}$

a) Nullpunktene er $x = 1$ og $x = -11$

b) $\phi'(t) = 3t^2 + 18t - 21$. Vokser på $(-\infty, -7]$ og $[1, \infty)$, avtar på $[-7, 1]$. Lokalt maksimumspunkt $x = -7$. Lokal maksimumsverdi $f(-7) = 256$. Lokalt minimumspunkt $x = 1$. Lokal minimumsverdi $f(1) = 0$

c) Konkav på $(-\infty, -3]$, konveks på $[-3, \infty)$. Vendepunkt $x = -3$

$\boxed{10}$

a) Bruk skjæringssetningen

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Kun ett nullpunkt.

$\boxed{11}$ 25 cm

$\boxed{12}$ ≈ 49.5 meter

$\boxed{13}$ 25

$\boxed{14}$ $k^2/4$

$\boxed{15}$ Høyde 10 cm, lengde og bredde 20 cm

$\boxed{16}$

a) $0, \frac{1}{4}(3+\sqrt{57}), \frac{1}{4}(3-\sqrt{57})$

b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[2, \infty)$, avtar på $[-1, 2]$. Lokalt makspunkt $x = -1$, $f(-1) = 7$. Lokalt minpunkt $x = 2$, $f(2) = -20$

c) Konkav på $(-\infty, 1/2]$, konveks på $[1/2, \infty)$. Vendepunkt $x = 1/2$.

$\boxed{17}$

a) 0 og -1

b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[-1/2, \infty)$, avtar på $[-1, -1/2]$. Lokalt maksimum $x = -1$, $f(-1) = 0$. Lokalt minimum $x = -1/2$, $f(-1/2) = -1/4$

c) Konkav på $(-\infty, -1]$, konveks på $[-1, \infty)$. Vendepunkt $x = -1$.

$\boxed{18}$ a) 0 og $-a$ b) Vokser på $(-\infty, -a]$ og $[-a/2, \infty)$, avtar på $[-a, -a/2]$. Lokalt maksimum $x = -a$, $f(-a) = 0$. Lokalt minimum $x = -a/2$, $f(-a/2) = -a^2/4$ c) Konkav på $(-\infty, -a]$, konveks på $[-a, \infty)$. Vendepunkt $x = -a$.

$\boxed{19}$

a) Nullpunkter $x = 0$ og $x = 8$. Vokser på $(-\infty, 6]$, avtar på $[6, \infty)$

b) Konkav på $(-\infty, 8]$ og $[12, \infty)$, konveks på $[8, 12]$

$\boxed{20}$

a) Nullpunkter $x = 0$, $x = 1$. Vokser på $(-\infty, -2/11]$ og $[0, \infty)$. Avtar på $[-2/11, 0]$

b) Konkav på $(-\infty, -1]$, $[c_1, 0]$ og $[0, c_2]$, der $c_1 \approx -0.395$ og $c_2 \approx 0.05$. Konveks på $[-1, c_1]$

$\boxed{21}$ $x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$

$\boxed{22}$ $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

$\boxed{27}$

a) $F(x) = 2 - x$

$\boxed{28}$

a) $F(x) = 3x + 2$

b) $F(x) = 1$

c) $F(x) = \sqrt{x_0} + (x - x_0)/(2\sqrt{x_0})$

$\boxed{30}$

a) $f(x) = (x-3)^2 - 8$

$\boxed{33}$ ≈ 2.52 meter

$\boxed{34}$ $x = \sqrt{2}$. Arealet er 2

$\boxed{35}$ $x = (3\sqrt{3})/4$

$\boxed{36}$ $\sinh a$

$\boxed{37}$ De andre vinklene er tilnærmet 50.5° og 89.5°. Den siste siden er tilnærmet 7.8.

$\boxed{38}$ $\theta = 60^\circ$

$\boxed{39}$ Hvis $c_1 \leq c_2$, velg $x = 200$. Ellers, velg x som det minste av tallene 200 og $100c_2(c_1^2 - c_2^2)^{-1/2}$

$\boxed{40}$ $\approx 70.5^\circ$

$\boxed{41}$ $y = 1 + 4(x - \pi/4)$

$\boxed{42}$ Makspunkter $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, der er et k helt tall. Minpunkter $x = \pi/2 + 2k\pi$, der er et k helt tall.

Seksjon 3.1

$\boxed{1}$

a) $3x^2 + C$

b) $x^2 + 5x + C$

c) $x^5 + C$

d) $\frac{1}{5}x^5 + C$

$\boxed{2}$

a) $-(1/x) + C$

b) $-(2/x) + (3/2x^2) + C$

c) $\frac{1}{4}(x+1)^4 + C$

d) $\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$

e) $\frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$

f) $-(r_0/x) + (kx^2/2) + C$

$\boxed{3}$

a) $s''(t) = -g$, så $s'(t) = -gt + C$. Kravet $s'(0) = v_0$ gir da $s'(t) = v_0 - gt$. Dermed $s(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 + C$. Kravet $s(0) = 0$ gir $C = 0$, så svaret er $s(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

b) Kulen er høyest ved $t = v_0/g$. Høyde da: $s(v_0/g) = v_0^2/(2g)$. Total tid fra kulen skytes opp til den treffer bakken: $2v_0/g$

c) Høyde $\approx$ 510 meter, total svevetid $\approx$ 20.4 sek.

Seksjon 3.2

$\boxed{1}$ 0.36

$\boxed{2}$

b) 2

$\boxed{3}$ 1/3

Seksjon 3.3

$\boxed{1}$

a) $2/3$

b) $\frac{1}{2}kb^2 + hb$

c) 4

d) $x + x^2/2 + x^3/3$

$\boxed{2}$ Arealet er $\int_0^2 x^3\,dx = 4$

$\boxed{3}$

a) $f'(x) = 1/\sqrt{1+\sin^2 x}$

b) $f'(x) = \sqrt{1+x^{12}} \cdot 2x$ ved kjerneregelen

$\boxed{4}$ 36

$\boxed{4}$ Omtrent 3.4 meter

$\boxed{5}$ Arealet er $\int_{-2}^{-1}(1/x^2)dx = 1/2$

$\boxed{6}$ Siden $\int_{-1}^{1}(x^4 - 1)dx = -8/5$, er arealet 8/5

$\boxed{7}$ Arealet er $\int_{-1}^{2}(x+2)dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = 9/2$

Seksjon 3.4

$\boxed{1}$

a) $\frac{1}{28}(x^2+9)^{13} + C$

b) $\frac{-1}{112}(7x^4 - 5)^{-4} + C$

c) $\frac{1}{48}(6x+5)^8 + C$

d) $\frac{1}{8a}(ax+b)^8 + C$

e) 34.1

f) $(k_p/\omega)[(kx - \omega t_0)^{-1} - (kx-\omega)^{-1}]$

g) $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C$

h) $\frac{1}{3}(\sqrt{t^2+1})^3 + C$

i) $2\sqrt{2} - 2$

j) $-\frac{8}{3}\sqrt{8 - y^3} + C$

$\boxed{2}$

a) $\frac{1}{12}(\sqrt{8x+3})^3 + C$

b) $\frac{2}{3a_0}(\sqrt{a_0 x + r})^3 + C$

c) $\sqrt{x^2+1} + C$

d) $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$

e) $(\frac{2}{3}x - 2)\sqrt{x} + C$

f) $\frac{3}{8}(\sqrt{1+t^4})^3 + C$

$\boxed{3}$

a) $\frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1} + C$

b) $\frac{n}{n-1}(\sqrt[n]{x})^{n-1} + C$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{8(n+1)}[5^{n+1} - 4^{n+1}]$

Seksjon 3.5

$\boxed{1}$

a) $x \sin x + \cos x + C$

b) $-xe^{-x} - e^{-x} + C$

c) $-x \cos x + \sin x + C$

d) $-(1/2)te^{-4t} - (1/8)e^{-4t} + C$

e) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

f) $\frac{1}{25}(1 + 4e^5)$

g) $1 - 2e^{-1}$

h) $\frac{1}{3}(x^3e^{x^3} - e^{x^3}) + C$

i) $\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

j) $t^3e^t - 3t^2e^t + 6te^t - 6e^t + C$

k) $x \ln x - x + C$

l) $(x \ln x - x)/(\ln 10) + C = x \log x - x/(\ln 10) + C$

$\boxed{2}$

c) $(1/2)e^x \sin x - (1/2)e^x \cos x + C$

$\boxed{3}$

a) $(1/2)e^x \sin x + (1/2)e^x \cos x + C$

b) $-(1/5)e^{2t} \cos 4t + (1/10)e^{2t} \sin 4t + C$

$\boxed{4}$ $(1/4)e^{2x} + (1/2)x + C$

$\boxed{5}$

b) $x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + C$

$\boxed{6}$ $x(\ln x)^4 - 4x(\ln x)^3 + 12x(\ln x)^2 - 24x \ln x + 24x + C$

Seksjon 3.7

$\boxed{1}$

a) $(1/8)x - (1/32)\sin 4x + C$

b) $-2/(\cos x) + 1/(3\cos^3 x) - \cos x + C$

c) $\cos x - \operatorname{artanh}(\cos x) + C$

d) $(1/7)\cos^7 x - (1/5)\cos^5 x + C$

$\boxed{2}$

a) $(2/3)\sin^{3/2} x - (4/7)\sin^{7/2} x$
$+(2/11)\sin^{11/2} x + C$

b) $-2(\sin x)^{-1/2} - \frac{4}{3}(\sin x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + C$

$\boxed{3}$

a) $1/(2\sin x) - 3\sin x - (1/3)\sin^3 x - (1/5)\sin^5 x + C$

b) $-(\cos^4 x)/4 + C$

$\boxed{4}$ $(1/16)x - (1/64)\sin(4x) - (1/48)\sin^3 2x + C$

$\boxed{5}$

b) $-(1/6)\cos 3x - (1/22)\cos 11x + C$

c) $(1/8)\sin 4x - (1/28)\sin 14x + C$

d) $(1/10)\sin 5x - (1/38)\sin 19x + C$

Seksjon 3.8

$\boxed{1}$

a) $\arcsin(x/4) + C$

b) $(1/2)\arctan x + x/(2 + 2x^2) + C$

c) $\sqrt{x^2 - 25}/(25x) + C$

$\boxed{2}$ $(1/3)(a^2 - x^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2 - x^2} + C$

$\boxed{3}$

a) $x/\sqrt{1 + x^2} + C$

b) $(1/8)(2x^2 - 9)\sqrt{9 - x^2}$
$+ (81/8)\arcsin(x/3) + C$

c) $(x/8)(20-2x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin(x/2)+C$

d) $-\sqrt{1-x^2}/x-\arcsin x+C$

Seksjon 3.9

$\boxed{1}$ $-1/(2x^2+2x+2)+(2\sqrt{3}/3)[\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))+\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})/(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)]+C$

$\boxed{2}$

a) $-1/(x+3)+C$

b) $(1/\sqrt{14})\arctan((x+3)/\sqrt{14})+C$

c) $-2/(x^2-2x+10)+(15/162)[\arctan((x-1)/3)+\frac{1}{3}(x-1)/(1+\frac{1}{9}(x-1)^2)]+C$

d) $\operatorname{arsinh}((x+1)/2)+C$

e) $(1/2)\arcsin(x-1)+(1/2)(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+C$

Seksjon 3.10

$\boxed{1}$

a) $4\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$

b) $(1/3)x^3-(1/2)x^2+x-\ln|x+1|+C$

c) $(11/3)\ln|x-1|+2/(x-1)+(1/3)\ln|x+2|+C$

d) $\ln|x|+\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

e) $\ln|x+1|+\arctan x+C$

f) $\ln|x-1|-2\ln|x+2|+6/(x+2)+C$

g) $\ln|x-1|+(1/2)\arctan x+x/(2x^2+2)+C$

Seksjon 3.11

$\boxed{1}$

a) $(2/5)(x+2)^{5/2}-(4/3)(x+2)^{3/2}+C$

b) $(4/3)x^{3/4}-2\sqrt{x}+4\cdot\sqrt[4]{x}-4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$

c) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

d) $\sqrt{1-x^2}-2\arctan\sqrt{(1-x)/(1+x)}+C$

e) $2\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$

f) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

g) $(3/28)(2x+5)^{7/3}-(15/16)(2x+5)^{4/3}+C$

h) $(1/7)(x^2+4)^{7/2}-(8/5)(x^2+4)^{5/2}+(16/3)(x^2+4)^{3/2}+C$

$\boxed{2}$

a) $-2/(1+\tan(\theta/2))+C$

b) $-(1/5)\ln|\tan\frac{\theta}{2}-3|+(1/5)\ln|\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}|+C$

Seksjon 3.12

$\boxed{1}$

a) 1

b) $1/3$

c) -2

d) Divergerer

e) $3/2$

f) Divergerer

$\boxed{2}$

a) Konv

b) Konv

c) Div

d) Konv

e) Konv

f) Div

Seksjon 3.13

$\boxed{1}$

a) Trapesmetoden gir ≈ 0.506. Eksakt: 0.5

b) Trapesmetoden gir 3.87. Eksakt: 3.75

Seksjon 3.14

$\boxed{1}$ $x^2+(y+4)^2=4$

$\boxed{2}$ $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

$\boxed{3}$ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$\boxed{4}$ Bredde $(16/27)[(\sqrt{13/4})^3-1]$

$\boxed{5}$

a) $2\sqrt{5}$

b) $(8/27)[(\sqrt{22/4})^3-(\sqrt{13/4})^3]$

c) $13/12$

d) ≈ 1.16024

Seksjon 3.15

$\boxed{1}$

a) $128\pi/7$

b) $23\pi/2$

c) $(\pi/7)[1-2^{-7}]$

$\boxed{2}$

a) $32\pi/3$

b) $(2\pi/3)[(\sqrt{5})^3-(\sqrt{2})^3]$

c) $2\pi(k-1)$

$\boxed{3}$ $128\pi/45$

$\boxed{4}$ $s^2h/3$

$\boxed{5}$ $1/4$

$\boxed{6}$ $1/12$

$\boxed{7}$ $V=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}[f^{-1}(y)]^2dy$

$\boxed{8}$ $\pi[r^2a-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}r^3]$

$\boxed{9}$ $4r^3/3$

Seksjon 3.16

$\boxed{1}$ $V=\pi\int_a^b\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}dx$

$\boxed{2}$ $(\pi/6)[(\sqrt{5})^3-1]$

$\boxed{3}$ $11\pi/4$

$\boxed{4}$

b) Volumet er π

Seksjon 3.17

$\boxed{1}$ $6[(\sqrt{19})^3-(\sqrt{2})^3]$

$\boxed{2}$

a) $458\pi/15$

b) $101\pi/6$

$\boxed{3}$

a) $\pi/(2n+1)$

b) $2\pi/(n+2)$

$\boxed{4}$ $2[(\sqrt[n]{2})^{-1} - \frac{2}{n+1}(\sqrt[n]{2})^{-n-1}]$

$\boxed{6}$ $28\pi/3$

$\boxed{7}$ $V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$

$\boxed{9}$ Kulens gjennomsnittshøyde er tilnærmet 3.4 meter

Seksjon 4.1

$\boxed{2}$

b) $\sqrt{2}$ på begge

c) $3\pi/4$ og $5\pi/4$

d) $z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$, $w = \sqrt{2}e^{i(5\pi/4)}$

$\boxed{3}$

b) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -\sqrt{3}$, $z = (-1) + (-\sqrt{3})i$

$\boxed{4}$ $e^{i(\pi/4)} = (1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i$, $e^{i(\pi/3)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{i(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{i\pi} = -1$, $\frac{1}{2}e^{i(3\pi/2)} = -\frac{1}{2}i$, $2e^{i(\pi/3)} = 1 + \sqrt{3}i$

$\boxed{5}$ $z + w = 9 + i$, $zw = 26 + 22i$

$\boxed{6}$ $2e^{i(-\pi/3)} = 1 - \sqrt{3}i$, $5e^{i\cdot 1} = 5\cos 1 + (5\sin 1)i \approx 2.7 + (4.2)i$

$\boxed{7}$ $-2 + (-2)i = \sqrt{8}e^{i(5\pi/4)}$, og $3 + 4i = 5e^{i\theta}$, der $\theta = \arccos(3/5) \approx 0.927$

Seksjon 4.2

$\boxed{1}$

a) $6 - 2i$

b) $-3 - 4i$

c) $1 + 3i$

d) $3 + 8i$

e) $4 + 12i$

f) $2 + 4i$

g) 2

h) $-19 - 13i$

i) $\frac{11}{10} - \frac{1}{5}i$

j) $-i$

k) $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

l) $-5i$

m) $-2+2i$

n) i

o) $-1-i$

p) $-(7/625)-(24/625)i$

q) $1+4i$

$\boxed{2}$

a) $6e^{i(3\pi/4)}$

b) $2e^{i(\pi/6)}$

$\boxed{3}$

a) $\overline{4+3i}=4-3i$, $\overline{-2-2i}=-2+2i$

b) $z=re^{i\theta}$ gir $\overline{z}=re^{i(-\theta)}=re^{-i\theta}$. Så konjugasjon gir speiling om den reelle aksen.

Seksjon 4.3

$\boxed{1}$ Den andre kvadratroten er $-2-3i$

$\boxed{2}$

a) $2e^{i(2\pi/3)}$

b) $e^{i(\pi/8)}$

c) $\sqrt{5}e^{i(5\pi/4)}$

d) e^{2i}

$\boxed{3}$

a) $(1/\sqrt{2})+\sqrt{\frac{3}{2}}i$

b) $-1/2+(\sqrt{3}/2)i$

c) $2^{1/4}\cos(\pi/8)+2^{1/4}\sin(\pi/8)i\approx 1.1+0.5i$

d) $2^{1/4}\cos(7\pi/8)+2^{1/4}\sin(7\pi/8)i\approx -1.1+(0.455)i$

$\boxed{4}$

a) $z=\pm(-\sqrt{(3/2)}+(1/\sqrt{2})i)$

b) $z=\pm(-(1/\sqrt{2})+(1/\sqrt{2})i)$

$\boxed{5}$

a) $3i$

b) i

c) $4i$

d) $i/2$

e) $(1/\sqrt{2})+(1/\sqrt{2})i$

f) $8^{1/4}\cos(\pi/8) + 8^{1/4}\sin(\pi/8) \approx 1.55 + (0.64)i$

$\boxed{6}$

a) z har 4 fjerderøtter

b) $1, -1, i$ og $-i$

Seksjon 4.4

$\boxed{1}$

a) $w_0 = 2^{1/6}e^{i(\pi/12)}$, $w_1 = 2^{1/6}e^{i(3\pi/4)}$, $w_2 = 2^{1/6}e^{i(17\pi/12)}$

b) $w_0 = 2e^{i(\pi/3)}$, $w_1 = -2$, $w_2 = 2e^{i(5\pi/3)}$

c) $w_0 = e^{i(\pi/6)}$, $w_1 = e^{i(5\pi/6)}$, $w_2 = e^{i(3\pi/2)}$

$\boxed{2}$ $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$

$\boxed{3}$ $z_1 = (\sqrt{3}/2) + (1/2)i$, $z_2 = -(\sqrt{3}/2) + (1/2)i$, $z_3 = -i$

$\boxed{4}$ $z = -1$ eneste løsning

$\boxed{5}$ $p \pm qi$

Seksjon 4.5

$\boxed{1}$

a) $z = \pm(-\sqrt{(3/2)} + (1/\sqrt{2})i)$

b) $z = \pm(-(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i)$

$\boxed{2}$

a) $5 \pm 3i$

b) $\pm 2i$

c) $-1 \pm 7i$

d) $3 \pm i$

e) 9 og -3

f) $-7 \pm 2i$

$\boxed{3}$

a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $-\frac{1}{2}i \pm \frac{3}{2}$

c) 0 og $-2 \pm 2i$

d) $\pm 1, \pm i, \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i), \pm(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$\boxed{4}$

$(\sqrt{2} - 2) + (\sqrt{2} - 2)i$ og $(-\sqrt{2} - 2) + (-\sqrt{2} - 2)i$

Seksjon 4.6

$\boxed{1}$ $P(z) = (z-3)^2(z-i)(z+i) = (z-3)^2(z^2+1)$

$\boxed{2}$

b) $x = 1-2i,\ x = -1,\ x = -2$

Seksjon 4.7

$\boxed{4}$ Hint: Skriv det komplekse tallet $e^{i\pi}$ på rektangulær form.

Seksjon 5.1

$\boxed{1}$ $x_n = 5\cdot 2^n + 4\cdot(-3)^n - n - 3/4$

$\boxed{2}$

a) (i) $x_n^h = C(-3)^n + Dn(-3)^n$
(ii) $x_n^s = \frac{1}{8}$
(iii) $x_n = C(-3)^n + Dn(-3)^n + \frac{1}{8}$
(iv) $x_n = \frac{7}{8}(-3)^n - \frac{7}{6}n(-3)^n + \frac{1}{8}$

b) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) $x_n^s = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
(iv) $x_n = 1 + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$

c) (i) $x_n^h = 6^{n/2}[C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}]$
(ii) $x_n^s = -\frac{10}{7} + (\frac{1}{e^2+6}\cdot n - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2})e^n$
(iii) $x_n = 6^{n/2}[C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}] - \frac{10}{7} + (\frac{1}{e^2+6}\cdot n - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2})e^n$
(iv) Som (iii), med $C = \frac{17}{7} - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2}$ og $D = 6^{-1/2}(\frac{17}{7} + \frac{2e^3}{(e^2+6)^2} - \frac{1}{e^2+6})$

d) (i) $x_n^h = C\cdot 0^n + D(-1)^n$. Merk at vi her bruker konvensjonen $0^0 = 1$. Vi har altså $x_0^h = C + D$, og $x_n^h = D(-1)^n$ for $n \geq 0$.
(ii) $x_n^s = \frac{1}{6}$
(iii)$x_n = C\cdot 0^n + D(-1)^n + \frac{1}{6}$
(iv) $x_n = \frac{5}{3}0^n - \frac{5}{6}(-1)^n + \frac{1}{6}$

e) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) Her kan vi gjette på $x_n^s = A\cos n + B\sin n$. Innsetting gir følgende lineære ligningssystem for A og B:

$$(-1+\cos 2)A + (\sin 2)B = 1$$
$$(-\sin 2)A + (-1+\cos 2)B = 0$$

Dette systemet har en entydig løsning som kan finnes f.eks. ved innsettingsmetoden.
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + A\cos n + B\sin n$ med A og B fra (ii) innsatt
(iv) $C = \frac{1}{2}(A(1+\cos 1) + B\sin 1)$ og $D = \frac{1}{2}(A(1-\cos 1) - B\sin 1)$ innsatt i (iii)

f) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) Her kan vi ta x_n^s til å være summen av x_n^s-ene fra b) og e), altså $x_n^s = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + A\cos n + B\sin n$, der A og B er som under e)
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + A\cos n + B\sin n$ med A og B som før

(iv) Siden $\frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) = 0$ for $n = 0$ og $n = 1$, blir verdiene for C og D de samme som i punkt e).

3

c) $L = (\sqrt{5} + 1)/2$, altså det såkalte «gyldne snitt»

4

a) 5

b) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

c) Dette blir Fibonaccitall nummer 101.

Seksjon 5.2

2

a) Nei

b) Ja

3 $f(x) = \sin x$

Seksjon 5.3

1 a) $y(t) = Ce^{2t} + 7$ b) $y(t) = 7 - 2e^{4t}$

2 a) $y(t) = (1/5)t - (1/25) + Ce^{-5t}$ b) $y(t) = (1/5)t - (1/25) + (26/25)e^{-5t}$

3 a) $y(t) = Ce^{3t} + 1$ b) $y(t) = 1 - e^{3t}$

4 a) $y(x) = Ce^{p_0 x} - w_0 q/p_0$ b) $y(x) = (y_0 + w_0 q/p_0)e^{p_0 x} - w_0 q/p_0$

5 a) $y(t) = Ce^{(t^2/4)+2t}$ b) $y(t) = -2e^{(t^2/4)+2t}$

6 a) $y(t) = \arctan t/\sqrt{t^2+1} + C/\sqrt{t^2+1}$ b) $y(t) = \arctan t/\sqrt{t^2+1} + 1/\sqrt{t^2+1}$

7 a) $y(t) = (1/2)t(\ln t)^2 + Ct$ b) $y(t) = (1/2)t(\ln t)^2 + t$

8 a) $y(t) = (qt/k) - (q/k^2) + (r/k) + Ce^{-kt}$ b) Sett $C = q/k^2 - r/k$ i løsningen fra a

9 a) $I(t) = (E/R) + Ce^{-(R/L)t}$ b) $I(t) = (E/R)(1 - e^{-(R/L)t})$

Seksjon 5.4

1 a) $y(t) = Ce^{4t} + 3/2$ b) $y(t) = (7/2)e^{4t} + 3/2$

2 a) $y(t) = (C - \frac{3}{2}t^2)^{-1/3}$ samt $y = 0$ b) $y(t) = (8 - \frac{3}{2}t^2)^{-1/3}$

3 a) $y(t) = -1 + 2/(1 + ke^{2t})$ samt $y(t) = -1$ b) $y(t) = -1$

4 a) $y(t) = Ct$ b) $y(t) = t$

5 $y(x) = \tan(x + \frac{1}{4}x^4 + C)$

6 $y(x) = 1 + Ce^t$

7

a) Ingen av delene

b) Lineær, $y(t) = t^2 - 2t + 2 + Ce^{-t}$

c) Separabel, $y(t) = \tan(t + C)$

d) Separabel, $y(t) = [\ln|2 + t| + C]^{-1}$

$\boxed{8}$ $y(t) = Ce^{at} - (b/a)$ for $a \neq 0$. For $a = 0$ fås $y(t) = bt + C$

$\boxed{9}$ Løsningen $y = y(t)$ oppfyller $e^y + y = t + 1$. Den er altså invers av funksjonen $g(t) = e^t + t - 1$. Dette kan du få mye informasjon ut av.

Seksjon 5.5

$\boxed{1}$ a) $y(t) = Ce^{(3/2)t} + 8/3$
b) $y(t) = -(11/3)e^{(3/2)t} + 8/3$

$\boxed{2}$ a) $y(t) = 10/(1 + ke^{-(6.4)t})$ samt $y(t) = 0$ b) $y(t) = 10/(1 + e^{-(6.4)t})$

$\boxed{3}$ a) $y(t) = 3 - 5/(1 + ke^{-10t})$ samt $y = 3$ b) $y(t) = 3 - 5/(1 - \frac{1}{4}e^{-10t})$

$\boxed{4}$ a) $y(t) = 1/(1 + ke^t)$ samt $y(t) = 0$ b) $y(t) = 1/(1 - \frac{1}{2}e^t)$

$\boxed{5}$ $-2N^2 + 6N - 4 = (-2)(N - 1)(N - 2)$. Generell løsning: $N(x) = 1 + 1/(1 + ke^{-2x})$ samt $N(x) = 1$.

Seksjon 5.6

$\boxed{1}$ $N(t) = 8 + 12/(1 + 5e^{-24t})$. Vekstraten er størst når $N = 14$, og da er $t = (\ln 5)/24$

$\boxed{2}$ $N(t) = 10000e^{3t}$. Ved $t = 10$ er der $\approx 10^{17}$ bakterier.

Seksjon 5.7

$\boxed{1}$ 25 år

$\boxed{2}$

a) $dg/dt = k - 0.05g$, $g(t) = 20k(1 - e^{-0.05t})$. Giftmengden stabiliserer seg på $20k$. Utslippsrate for maksimal forurensning: $k = 10$ kg pr. døgn

b) $dg/dt = -0.05g$. Utslippsrate: $k = 10e^{0.5} \approx 16.5$ kg pr. døgn

$\boxed{3}$

a) $dN/dt = (0.4t + 6)N$. Løsning: $N(t) = 14e^{0.2t^2+6t}$

b) $dN/dt = kN$. Løsning: $N(t) = 14e^{kt}$

c) $14e^8 \approx 41733$

Seksjon 5.8

$\boxed{1}$

a) Generell løsning $y(t) = Ce^t$

b) Generell løsning $y(t) = \arctan(t + C)$

c) Generell løsning $y(t) = t^2 - 2t + 2 + Ce^{-t}$

d) Generell løsning $y(t) = (1/3)t^3 + C$

e) Generell løsning $y(t) = 1/(1 + ke^t)$ samt $y(t) = 0$

Seksjon 5.9

$\boxed{1}$ a) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-4t}$ b) $y(t) = (1/6)e^{2t} - (1/6)e^{-4t}$

$\boxed{2}$ a) $y(t) = Ae^{(\sqrt{2}-1)t} + Be^{(-\sqrt{2}-1)t}$ b) $y(t) = (\sqrt{2}/2)e^{(\sqrt{2}-1)t} - (\sqrt{2}/2)e^{(-\sqrt{2}-1)t}$

$\boxed{3}$ a) $y(t) = Ae^{2t}\cos 3t + Be^{2t}\sin 3t$ b) $y(t) = e^{2t}\cos 3t - (2/3)e^{2t}\sin 3t$

$\boxed{4}$ a) $y(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ b) $y(t) = (4/5)e^{3t} + (6/5)e^{-2t}$

$\boxed{5}$ a) $y(t) = Ae^{-(1/2)t}\cos(\sqrt{3}t/2)$
$+ Be^{-(1/2)t}\sin(\sqrt{3}t/2)$ b) $y(t) = 0$

$\boxed{6}$ a) $y(t) = Ae^{-7t} + Bte^{-7t}$ b) $y(t) = e^{-7t} + 9te^{-7t}$

$\boxed{7}$ a) $y(t) = A + Be^{-t}$ b) $y(t) = 8 - 8e^{-t}$

$\boxed{8}$ a) $y_s(t) = 2/9$ b) $y(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t} + 2/9$ c) $y(t) = (7/9)e^{-3t} + (10/3)te^{-3t} + (2/9)$

$\boxed{9}$ a) $y_s(t) = -(1/2)t - (1/12)$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - (1/2)t - (1/12)$ c) $y(t) = e^{2t} + (1/12)e^{-3t} - (1/2)t - (1/12)$

$\boxed{10}$ a) $y_s(t) = (1/9)t^2 - (4/27)t + (2/27)$ b) $y(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t} + (1/9)t^2 - (4/27)t + (2/27)$

$\boxed{11}$ a) $y_s(t) = -1/6$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - 1/6$

$\boxed{12}$ a) $y_s(t) = -(1/2)t - 1/4$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - (1/2)t - 1/4$

$\boxed{13}$ $y(t) = Ae^{8t} + Bte^{8t} + 1/64$

$\boxed{14}$

a) $y_h(t) = Ae^{4t} + Be^{-5t}$

b) $y_s(t) = -(1/20)t - 1/400$

$\boxed{15}$ To reelle røtter r_1 og r_2: $W = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}$. En reell rot r: $W = e^{2rt}$. Komplekse røtter $u \pm iv$: $W = ve^{2ut}$

Seksjon 5.10

$\boxed{1}$

a) $(1/y)y' = 2 - t$, løsning $y(t) = e^{2t-(1/2)t^2}$

b) Vokser på $(-\infty, 2]$, avtar på $[2, \infty)$

$\boxed{2}$

a) $y' = g(t)\cdot(25 - y)$, løsning $y(t) = 25 - 23e^{-kt}$. Får $k = (1/100)\ln(23/5)$

b) $y(t) = 25 - 23e^{(r/2)t^2 - 100rt}$, får $r = (1/5000)\ln(23/5)$

c) $G = \ln(23/5)$

$\boxed{3}$

a) $v(t) = (g/k)(1 - e^{-kt})$

b) Stabiliserer seg på $v = g/k$ Med $k = 0.08$ s$^-1$ stabilisering på $v \approx 122.5$ m/s

c) g/k

$\boxed{5}$

a) Stigningstall 4

d) Generell løsning $y(t) = Ce^{3t-(1/2)t^2}$

e) Vokser på $(-\infty, 3]$ avtar på $[3, \infty)$.

$\boxed{9}$ Siden differensligningen bestemmer hvert nytt ledd ved hjelp av de to foregående, vil verdier for x_0 og x_1 bestemme løsningsfølgen entydig. Resultatet følger nå fra forrige oppgave

Seksjon 6.1

$\boxed{1}$

a) Konvergerer, sum 5

b) Konvergerer, sum $1/6$

c) Divergerer

d) Konvergerer, sum $7/10$

e) Konvergerer, sum $1/3$

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$

$\boxed{3}$ $17/12$

$\boxed{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot (0.977)^n = c/0.023 \approx (43.5)c$

Seksjon 6.2

$\boxed{1}$

a) Div

b) Konv

c) Div

d) Div

e) Konv

f) Konv

g) Konv

h) Konv

$\boxed{2}$

a) Div

b) Konv

c) Konv

d) Konv

e) Konv

f) Konv

g) Div

h) Konv

$\boxed{3}$

a) Divergerer

b) Konvergerer betinget

$\boxed{4}$

a) Div

b) Div

c) Konv

d) Div

e) Div

f) Konv

$\boxed{5}$ $1 - 2^{-2} + 3^{-2} - 4^{-2} + 5^{-2} - 6^{-2} + 7^{-2} - 8^{-2} + 9^{-2} - 10^{-2} \approx 0.818$

$\boxed{6}$

a) Konv

b) Div

c) Konv

d) Konv

e) Konv

f) Konv

g) Div

h) Konv

i) Konv

j) Konv

k) Div

l) Konv

m) Konv

n) Div

$\boxed{7}$ Konvergerer for $p > 1$, divergerer for $p \leq 1$.

Seksjon 6.3

$\boxed{1}$

a) Taylorrekken: $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \cdots$ $T_3(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$

b) $1/(2x+1)$

$\boxed{2}$ $T_3(x) = 3 - 7x + x^2 + 5x^3$. Taylorrekkene: Begge blir $3 - 7x + x^2 + 5x^3 + 2x^4$

$\boxed{3}$

a) $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (4/3)x^3 + (2/3)x^4$

$\boxed{4}$

b) $\ln(1.2) \approx 137/750$

Seksjon 6.4

$\boxed{1}$

a) Konvergerer for $x \in (-7, 13)$

b) Konvergerer for $x = 0$

c) Konvergerer for $x \in (1, 3]$

d) Konvergerer for $x \in [-6, 4]$

$\boxed{2}$

a) $R = 1$

b) $R = e$

$\boxed{3}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n^2 + 2n)$. Konvergerer for $x \in [-1, 1]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n/(n^2 + 2n)$. Konvergerer for $x \in [-1, 1]$

$\boxed{4}$

a) Til f: $x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \cdots$. Til g: $1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \cdots$

Seksjon 6.5

$\boxed{1}$ $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}/(n^n(n+1))$

$\boxed{2}$

a) $1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + x^8/9! - \cdots$

b) $-1 + x/2! - x^2/3! + x^3/4! - x^4/5! + \cdots$

c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{4\cdot 5}x^5 + \cdots$

d) $2 + (2\cdot 3)x + (3\cdot 4)x^2 + (4\cdot 5)x^3 + \cdots$

e) $\frac{1}{8} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{128}x^4 - \cdots$

$\boxed{3}$

b) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}/(2n+1)!$

c) $F(x) = x \sin x$

d) $f(x) = \sin x + x \cos x$

e) 1

Seksjon 6.6

$\boxed{1}$

a) (i) $x \in (-1, 1)$ (ii) $x/(1-x)^2$

b) (i) $x \in (2, 4)$ (ii) $(x-3)/(4-x)^2$

c) (i) $x \in (2/3, 4/3)$ (ii) $1/(4-3x)$

d) (i) $x \in [-1, 1)$ (ii) $-\ln(1-x)/x$ for $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$. For $x = 0$ er summen 0.

$\boxed{2}$ 2

$\boxed{3}$ $(5/4) - 3\ln 3 - 3\ln 2$

Seksjon 6.8

$\boxed{1}$

a) $n = 11$ holder. $T_{11}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$

b) $n = 27$

$\boxed{2}$

a) $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

$\boxed{3}$ $1/3 - 1/42 + 1/1320$

$\boxed{5}$ Integralet er tilnærmet lik $13/42$

$\boxed{6}$

a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$

b) $1 + 2x^2 - 2x^4 + \cdots$

c) $1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^8 + \cdots$

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \cdots$

$\boxed{7}$ $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \cdots$

$\boxed{8}$

b) $\arctan 1 = \pi/4$

$\boxed{9}$ Konvergerer

$\boxed{10}$

a) Konvergerer

b) Divergerer

$\boxed{11}$ $(-6, 2]$

$\boxed{12}$ $T_3(x) = -1 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{512}(x-1)^3$

$\boxed{13}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}x^{2n+2}$

$\boxed{14}$

d) $T_2(v) = (1/2)m_0v^2$

$\boxed{17}$

a) $T_0 = 80/9$, $S_1 = 80/9$

b) $T_1 = 80/(9^2)$, $S_2 = 80/(9^2)$

c) $T_2 = 80/(9^3)$, $S_3 = 80/(9^3)$

d) 10 sekunder

Seksjon 7.1

$\boxed{1}$

a) $x = 3$, $y = 7$

b) $x = 17$, $y = -13$

$\boxed{2}$

a) $x = 3$, $y = -6$, $z = 0$

b) $x = y = 1/5$, $z = -1$

$\boxed{3}$ $x = 1$, $y = 2$

$\boxed{4}$ Løsningene er alle punkter (x, y) slik at $x = 2y$

$\boxed{5}$ Systemet har ingen løsninger

Seksjon 7.2

$\boxed{1}$

a) Generell løsning $(x, y, z) = (-2, -1, 2)$. Dimensjon: 0

b) Gen. løsning $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, -5t, 1-4t, t)$. Dimensjon: 1. Kommentar: En annen måte å skrive løsningen på er

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, -5t, 1-4t, t) = (2, 0, 1, 0) + t \cdot (-3, -5, -4, 1)$$

Tilsvarende for oppgavene nedenfor. Dette vil bli aktuelt senere, når vi diskuterer nullrommet til matriser og kjernen til linæravbildninger. Se seksjon 12.3.

c) Generell løsning $(x, y, z) = (-\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, t)$. Dimensjon: 1

$\boxed{2}$

a) Generell løsning $(x, y) = (5, 1)$. Dimensjon 0

b) Generell løsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2 - 15r + 3s - \frac{25}{2}t, -1 - 6r + s - \frac{11}{2}t, r, s, t)$. Dimensjon: 3

c) Gen. løsn. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - 5s + t, s, t, -1, 2)$. Dimensjon: 2

d) Ingen løsning

e) Gen. løsning $(x, y, z) = (3 - 2t, -2t, t)$. Dimensjon: 1

Seksjon 7.3

$\boxed{1}$

a) 23

b) -3

$\boxed{2}$

a) -27

b) 46

$\boxed{3}$ 34

$\boxed{4}$

a) Inhomogent

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -2 & -17 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $D = -184$

c) En entydig løsning

$\boxed{5}$

a) Entydig løsning

b) Uendelig mange løsninger

$\boxed{6}$ Entydig løsning

$\boxed{7}$

a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$, $D = a^4 + a$

b) $a = 0$ og $a = -1$

c) Uendelig mange løsninger hvis $a = 0$, ingen løsning hvis $a = -1$, entydig løsning ellers.

$\boxed{2}$ Ved suksessiv oppløsning etter første rad får vi at dersom en kvadratisk matrise M er såkalt *øvre triangulær*, dvs. at den har bare nuller under diagonalen (nedover fra øvre venstre hjørne til nedre høyre hjørne), så er det M lik produktet av elementene M_{ii} langs diagonalen. Dette gjelder forøvrig også hvis M er *nedre triangulær*, dvs. at M har kun nuller over diagonalen.

Seksjon 7.5

$\boxed{1}$

a) A er 3×3, B er 3×1 og C er 2×3

b) BA, AC og BC er ikke definert. Vi har $AB = \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 8 & 16 & -12 \\ 6 & 0 & -13 \end{bmatrix}$, $CB = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 9 & 39 & -16 \\ 21 & 11 & -48 \\ 6 & 18 & -4 \end{bmatrix}$

2

a) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -26 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

3

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Ved å prøve deg frem kan du se at resultatet ser ut til å være $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Du kan så bevise dette ved induksjon ved å bruke at

$$\begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3+3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5

a) $AI = IA = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$

6 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$ (dette er en (2×1)-matrise)

Seksjon 7.6

1

a) På disse oppgavene er det enklest å bruke den eksplisitte formelen for inverse av (2×2)-matriser, selv metoden i teorem 2 naturligvis også fungerer. Vi får at den inverse er

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen er sin egen invers

c) Ikke inverterbar, fordi determinanten er 0

3 $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ De transponerte av matrisene fra oppgave 1 er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

De transponerte fra oppgaven i forrige seksjon er

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{\mathrm{T}} = [\,3 \quad -1 \quad -2\,] \qquad C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ Hvis vi antar at A og B har inverser A^{-1} og B^{-1}, får vi ved vanlige regneregler for matriser

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

En tilsvarende regning viser at $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Altså $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

a) Siden $A \cdot A^{-1} = I$, får vi $\det(A^{-1}A) = \det I$. Altså $\det(A^{-1}A) = 1$. Produktregelen for determinanter gir så at $\det(A^{-1}A) = (\det A^{-1}) \cdot (\det A) = 1$. Divider med $(\det A)$ på begge sider av den siste likheten. Husk at $\det A$ bare er et tall, slik at $(\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Merk at siden A er inverterbar, vet vi også at vi ikke deler på 0 her.

b) Produktregelen for determinanter kombinert ved induksjon. Induksjonstrinnet: For $n \geq 1$ har vi

$$\det(A^{n+1}) = \det(A^n \cdot A) = \det(A^n) \cdot (\det A) = (\det A)^n \cdot (\det A) = (\det A)^{n+1}$$

Her brukte vi produktregelen for determinanter i andre overgang.

$\boxed{7}$ Hvis mamma, Stine og Trine er x, y og z, så har vi $x = y+z$, $x-21 = 4(y-21)+4(z-21)$ og $(x-18)+(y-18) = 10(z-18)$ Omskriving gir at dette systemet har matrisen M som koeffisientmatrise. Vi får $x = 49$, $y = 27$ og $z = 22$.

$\boxed{8}$ Determinanten er $84 - 31\lambda + \lambda^2$. Verdier av λ: 28 og 3

Seksjon 7.7

$\boxed{1}$ Egenverdien er 3

$\boxed{2}$

a) $\lambda_1 = 9$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} -3B_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} -7B_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 3$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_1 \\ (5/2)A_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$

d) $\lambda = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (alle vektorer er egenvektorer)

$\boxed{3}$

a) $\lambda_1 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = -1$ med $\begin{bmatrix} A_3 \\ -A_3 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1$ med $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \\ A_2 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = -5$ med $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1 = -5$ med $\begin{bmatrix} -6B_1 \\ B_1 \\ -(5/3)B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{bmatrix}$

4 $\lambda_1 = -6$ med $\begin{bmatrix} -2C_1 \\ -3C_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -2$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ -A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 2$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \\ -B_3 \end{bmatrix}$

5

a) $\lambda_1 = 0$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\lambda = 0$ med $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (alle vektorer er egenvektorer)

Seksjon 7.8

1

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) Neste dag: $\begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$. Dagen etter det igjen: $\begin{bmatrix} 150 \\ 150 \end{bmatrix}$

c) $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Dagen før: $\begin{bmatrix} 130 \\ 170 \end{bmatrix}$. To dager før: $\begin{bmatrix} 40 \\ 260 \end{bmatrix}$

d) $A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

e) Tilstanden ved tid $t = n$ blir $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 200(-1/2)^n \\ 200 - 200(-1/2)^n \end{bmatrix}$

2

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Nei. Generell løsning $(x, y, z) = (20, 6, t)$, der t er en fri parameter

c) Nei. Usikkerheten knytter seg til antall gamle ifjor. Denne usikkerheten tilsvarer den frie parameteren i ligningssystemet fra forrige punkt

d) $\lambda = 2$ med egenvektorer $(4C_1, 2C_1, C_1)$, $\lambda_2 = -2$ med egenvektorer $(4C_2, -2C_2, C_2)$, $\lambda_3 = 0$ med egenvektorer $(0, 0, C_3)$. At tilstandsvektoren er en egenvektor med egenverdi 0, er ensbetydende med at bestanden vil være utryddet neste år. I vårt eksempel vil dette være tilfelle når vi bare har gamle katter

e) $(x_n, y_n, z_n) = (8 \cdot 2^n + 4 \cdot (-2)^n, 4 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n, 2 \cdot 2^n + (-2)^n)$ for $n > 0$. Vi har $(x_8, y_8, z_8) = (3072, 512, 768)$

f) $k \approx 0.7174$

3 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1/2) \end{bmatrix}$. Merk at P ikke er entydig bestemt.

Seksjon 7.9

$\boxed{1}$ Ja

$\boxed{2}$ Determinanten er 0 for $a = -4$, $a = 1$ og $a = 4$. Ligningssystemet er garantert ikke selvmotsigende når $a \notin \{-4, 1, 4\}$. (Velg $x_4 = 0$.)

$\boxed{3}$

a) $x = 10/3$, $y = -10/3$

b) $x = 5$, $y = 0$

$\boxed{4}$ $x = -3$, $y = 1$, $z = 2$

$\boxed{5}$

a) -1

b) 0

$\boxed{8}$

a) En entydig løsning

b) En entydig løsning

$\boxed{9}$ La N være matrisen som fås fra M ved å trekke fra λ langs diagonalen. Fra teorem teksten vet vi at det $N = \det(N^{\mathrm{T}})$. Vi finner egenverdiene til M ved å sette det $N = 0$. Videre finner vi egenverdiene til M^{T} ved å sette det $N^{\mathrm{T}} = 0$, fordi transponering ikke endrer diagonalen i en matrise. Altså må egenverdiene til M og M^{T} bli de samme.

$\boxed{10}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ med egenverdi 0, men den er ikke en egenvektor for M^{T}

$\boxed{11}$ Vi får $(AB)C = C$, som gir $A(BC) = C$. Innsatt $BC = I$ gir dette $A = C$. Så $BA = I$.

Seksjon 8.1

$\boxed{1}$

a) $(3, 4)$

b) $(10, 2)$

c) $(6, -9)$

d) $\sqrt{13}$

e) -7

f) $\sqrt{650}$

$\boxed{3}$ $\theta = \arccos(34/\sqrt{1750}) \approx 0.622$

$\boxed{4}$ Ikke vinkelrett

$\boxed{5}$

a) $(5, 3, 0)$

b) $(-11, -22, 6)$

c) $(-9, -12, 6)$

d) $\sqrt{29}$

e) -2

f) 15

Seksjon 8.2

1

a) $(-2, 1, -4)$

b) $(-3, 2, 1)$

c) $\mathbf{0}$

2 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Figuren bør vise en pil fra origo til punktet $(1, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$

3 19

4 21

5 21

6 51/2

7 Vi har

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ad - bc)$$

Så

$$|(a, b, 0) \times (c, d, 0)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (ad - bc)^2} = |ad - bc| = \left|\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right|$$

Fra teorem 3 følger nå at

$$\left|\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right|$$

er arealet av parallellogrammet utspent av vektorene (a, b) og (c, d) i planet. (Hintet om $\det A = \det A^T$ trengs ikke når man setter det opp slik som dette.)

8 Vi regner ut venstre side i lov 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \big(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \big) \\ &= \big(a_2b_3 + a_2c_3 - a_3b_2 - a_3c_2, a_3b_1 + a_3c_1 - a_1b_3 - a_1c_3, a_1b_2 + a_1c_2 - a_2b_1 - a_2c_1 \big) \end{aligned}$$

Utregning av høyre side i lov 2, altså $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, gir samme svar. Dermed er lov 2 vist. Tilsvarende med lov 3 og 4.

9 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (-1, 0, 0)$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (0, 1, -1)$

Seksjon 8.3

$\boxed{1}$ 9

$\boxed{2}$ 105

$\boxed{3}$ 6

$\boxed{4}$

a) Vektoren $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ må stå vinkelrett på $\mathbf{a}$

b) Sett $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, regn ut de to vektorene $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ og $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, og se de er like etter at du har ganget ut alle parentesene. Dette blir en del regning, men det trener nøyaktighet og konsentrasjon. Et glimrende alternativ til meditasjon.

Seksjon 8.4

$\boxed{1}$

a) $(10, 3, 1)$

b) $(-8, -8, -12)$

$\boxed{2}$

a) Lineært uavhengige

b) Lineært avhengige

$\boxed{3}$

a) Lineært avhengige

b) Lineært uavhengige

$\boxed{4}$

a) 2

b) $\mathbf{x}$ ligger ikke i underrommet

$\boxed{6}$

a) $\{(-2, 4, 19), (1, 2, -1/2)\}$. Dimensjon 2

b) $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$. Dimensjon 2

c) $\{(3, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 0, 1)\}$. Dimensjon 3

$\boxed{7}$ De to vektorene $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ og $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ har begge prikkprodukt 0 med $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. La U være underrommet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Siden $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, er dimensjonen til U lik 2. At alle vektorer i U har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$, følger fordi enhver lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + (b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

Siden $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2 \neq 0$, er $\mathbf{n}$ selv ikke i U. Altså er U ikke tredimensjonalt, og det følger at U er underrommet bestående av alle vektorer som har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$.

$\boxed{8}$ $\{(1, -1, 1, -1), (2, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

Seksjon 8.5

$\boxed{1}$

a) $A(\mathbf{e}_1) = (-1, 1, 0)$, $A(\mathbf{e}_2) = (0, 0, 1)$

b) Basis: $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Rang: 2

$\boxed{2}$

a) $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Basis: $\{(-1, 1)\}$. Rang: 1

b) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Basis: $\{(-1, 1)\}$. Rang: 1

c) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Basis: $\{((1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$. Rang: 2

d) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Basis: $\{(2, 1, 0), (5, 1, 0), (2, -2, 1)\}$. Rang: 3

$\boxed{3}$ Gauss-eliminasjon (eller Matlab, eller hva du måtte ønske) gir at den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra metoden for å finne *rangen og en basis for bildet til en matrise* (se denne seksjonen) vet vi at søylevektorene i A som tilsvarer pivoter i den reduserte trappeformen, utgjør en basis for bildet til A, altså $\operatorname{Col} A$. Altså er $\{(1, 0, -2, 1), (2, 3, 1, 0)\}$ en basis. Basisen har to elementer, så bildet er todimesjonalt og rangen til A er 2.

Seksjon 8.6

$\boxed{1}$ $x + 2y - z = 0$

$\boxed{2}$ $x + y + z = 3$

$\boxed{3}$

a) $(1, 1, -3)$

b) $(1, -1, -1)$

$\boxed{4}$

a) $\mathbf{N} = (2, 2, 0)$

b) $x + y = 0$

$\boxed{5}$ Den generelle løsningen av ligningen $2x + 11y - 5z = 0$ kan skrives $x = -\frac{11}{2}y + \frac{5}{2}z$, med Y og z som frie parametre. Setter vi $y = s$ og $z = t$, kan løsningen skrives $(x, y, z) = s \cdot (-\frac{11}{2}, 1, 0) + t \cdot (\frac{5}{2}, 0, 1)$. Med andre ord utgjør de to vektorene $(-\frac{11}{2}, 1, 0)$ og $(\frac{5}{2}, 0, 1)$ en basis for U. Et penere svar får vi ved å gange dem med 2. Basisen vår blir da $\{(-11, 2, 0), (5, 0, 2)\}$.

$\boxed{6}$

a) Normalvektor $(1, 1, 1)$

b) Normalvektor $(1, 1, 0)$

c) Normalvektor $(-1, 1, 1)$

d) Normalvektor $(1, 0, 1)$

$\boxed{7}$ Ingen punkter felles

$\boxed{9}$

b) $\arccos(7/\sqrt{126}) \approx 0.897$

Seksjon 8.7

$\boxed{1}$

a) Hyperbel

b) Ellipse

c) Ellipse

d) Parabel

$\boxed{2}$

a) Hyperbel

b) Parabel

c) Ellipse

$\boxed{3}$

a) $2(x+3)^2 - 19$

b) $-(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$

c) $(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

d) $(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$

$\boxed{4}$

a) Ellipse

b) Hyperbel

c) Parabel

Seksjon 8.8

$\boxed{1}$ $x - 3 = \frac{1}{4}(y-1)^2$

$\boxed{2}$ $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-5)^2$

$\boxed{3}$

a) Brennpunkt $(0, 1/4)$, styrelinje $y = -1/4$

b) Brennpunkt $(1/4, 0)$, styrelinje $x = -1/4$

c) Brennpunkt $(2, -1/16)$, styrelinje $y = 1/16$

$\boxed{4}$ $(2, \sqrt{5})$ og $(2, -\sqrt{5})$

$\boxed{5}$ $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 17$

$\boxed{6}$ $(0, \sqrt{2})$ og $(0, -\sqrt{2})$

Seksjon 8.9

$\boxed{1}$

a) $r = 2, \theta = 0$

b) $r = 4, \theta = \pi/2$

c) $r = 1, \theta = 3\pi/2$

d) $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$

e) $r = 2, \theta = \pi/3$

f) $r = 5, \theta = \arccos(-3/5) \approx 2.2$

$\boxed{2}$

a) $(0, -1)$

b) $(-1, -1)$

$\boxed{3}$

$\boxed{5}$

a) $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$

b) $r \in [0, \infty), \theta \in [\pi/4, \pi/2]$

c) $\theta \in (-\pi/2, \pi/2), r > 1/\cos\theta$. Forklaring: De mulige verdiene for θ er intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$. Når du har valgt en θ i dette intervallet, må du så velge $r > 1/\cos\theta$ for at punktet ditt skal havne innenfor området.

d) $\theta \in [0, \pi/4], r \in [0, 2]$

$\boxed{6}$ $x^2(1 - a^2) + 2a^2x + y^2 = a^2$

Seksjon 8.10

$\boxed{1}$ $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\boxed{4}$ $(x/4)^2 + y^2 + (z/3)^2 = 1$

$\boxed{5}$ $(x - 2)^2/4 + y^2 + z^2/4 = 1$

$\boxed{6}$ (i) $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$ (ii) $(x/3)^2 + z^2 = 1$ (iii) $(y/2)^2 + z^2 = 1$ (iv) $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 3/4$ (v) $(x/3)^2 + z^2 = 3/4$ (vi) $(y/2)^2 + z^2 = 5/9$. Alle snittkurvene blir ellipser.

Seksjon 8.11

$\boxed{1}$

a) $r = 1, \theta = \pi/2, z = 2$

b) $r = \sqrt{8}, \theta = \pi/4, z = 1$

c) $r = 2, \theta = 7\pi/6, z = 2$

$\boxed{2}$

a) $(-2, 0, 2)$

b) $(0, -2, 0)$

$\boxed{3}$

a) $z = 4 - r^2$

b) $r^2 = 4$

c) $r^2 \sin^2\theta + z^2 = 1$

d) $z = r^2 \cos 2\theta$

e) $\cos\theta = -\sin\theta$

f) $r\cos\theta + r\sin\theta + z = 0$

$\boxed{4}$

a) $\rho = 2, \theta = \pi/2, \phi = \pi/2$

b) $\rho = \sqrt{8}, \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$

c) $\rho = \sqrt{8}, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$

d) $\rho = 5, \phi = \pi$, θ hva som helst

e) $\rho = 4, \phi = 0$, θ hva som helst

f) $\rho = 2, \theta = 3\pi/2, \phi = \pi/6$

$\boxed{5}$ $r^2 + z^2 = 4$

$\boxed{6}$

a) $(-3, 0, 0)$

b) $(0, 0, -1)$

$\boxed{7}$

a) $\rho^2 = 4$

b) $\phi = \pi/4$

c) $\rho = \cos\phi/\sin^2\phi$ for $\phi \in (0, \pi/2]$

d) $\rho(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 2\sin\phi\cos\theta$

$\boxed{8}$ $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

Seksjon 8.13

$\boxed{1}$ $9/\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ $x = 0$

$\boxed{3}$ $x + 7y = 12$

$\boxed{4}$ Nei

$\boxed{5}$

a) $\arccos(34/\sqrt{1325}) \approx 0.365$

b) $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 0.955$

c) $\arccos(1/2) = \pi/3$

6

a) $(-1, -5, -6)$

b) $(3, 5, 24)$

c) $(0, 0, 1)$

d) $\sqrt{98}$

e) 12

f) 70

7

a) $(0, -2, -2)$

b) $(4, -8, 4)$

8 4

9 2

10 $-x + 2y + z = 3$

13 Basis: $\{(2, -1, 1), (9, 1, 2), (0, 6, -3)\}$,
$\mathbf{x} = (2 - 34t, 1 + 4t, -3 - 11t, t)$, der $t \in \mathbb{R}$

14

a) Vi har

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan se fra dette at de to første søylevektorene i M, altså $(0, 1, 0)$ og $(4, 0, 1)$, utgjør en basis for bildet til M. Så bildet er et todimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$, altså et plan gjennom origo. Vi har

$$(0, 1, 0) \times (4, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -4),$$

så planet har $(a, b, c) = (1, 0, -4)$ som normalvektor. Siden planet også går gjennom $x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, blir ligningen $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = x + 0 - 4z = 0$ Ligningen for P er altså $x - 4z = 0$. Biologisk tolkning: Det må være 4 ganger så mange unge som gamle. (Tenk over hvorfor.)

b) $L \cap P = \{(20, 6, 5)\}$. Biologisk tolkning: Snittet representerer den tilstanden vi må ha hatt ifjor dersom utviklingen av kolonien har vært styrt av matrisemodellen i mer enn ett år.

15 Anta at $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Da får vi

$$(aM)\mathbf{x} = a(M\mathbf{x}) = a(\lambda\mathbf{x}) = (a\lambda)\mathbf{x}$$

Her brukte vi antakelsen vår i andre overgang og vanlige regler for matriseregning i første og tredje overgang. Altså er $\mathbf{x}$ en egenvektor for matrisen aM med egenverdi $a\lambda$.

17

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

18

b) $e_1 = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$, $e_2 = \sqrt{15}/4 \approx 0.968$, $e_3 = 0$

c) $\sqrt{2}$

19 Jorden: $a/b \approx 1.00014$, Pluto: $a/b \approx 1.0325$, Kohoutek: $a/b \approx 84.5$

21

d) Hvis $\mathbf{x}$, $y \in \text{Nul}\, A$ og $a \in \mathbb{R}$, har vi

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{og} \qquad A(a\mathbf{x}) = (aA)\mathbf{x} = a(A\mathbf{x}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Altså er Nul A et underrom av $\mathbb{R}^n$

22 Radreduksjon (Gauss-eliminasjon) gir at A er radekvivalent med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

som er på redusert trappeform. Siden de tre første søylene her er pivot-søyler, følger at de tre første søylevektorene i A er en basis for bildet Col A til matrisen. Altså er

$$\{(1,0,2,1),(0,6,9,6),(3,7,15,6)\}$$

en basis for Col A. For å finne en basis for nullrommet Nul A (definisjon i forrige oppgave), kan vi løse det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette gjøres ved den samme Gauss-eliminasjonen, og resultatet blir

$$\mathbf{x} = (2t, (1/3)t, -t, t) = t(2, 1/3, -1, 1)$$

der $x_4 = t$ er fri parameter. Dette betyr at vektoren $(2, 1/3, -1, 1)$ alene utgjør en basis for Nul A. (Dimensjonen til Nul A er altså 1.)

23

a) Den skifter fortegn

b) De vil være nøyaktig like.

c) Underdeterminantene dannes ved å stryke raden og søylen hvert tall er med i, og fortegnet veksler $- + - + \cdots$ (minus først).

d) Fortegnet veksler her igjen $+ - + - \cdots$

e) Fortegnet veksler $+ - + - \cdots$ hvis linjenummeret er odde, og omvendt hvis linjenummeret er partall. Som oppsummering kan vi si at fortegnene fordeler seg som rutene på et sjakkbrett, med positiv (hvit) rute øverst til venstre.

f) Fortegneregelen blir akkurat som for oppløsning etter n-te rad (sjakkbrett).

Seksjon 9.1

1

a) Området der $xy \leq 1$. Dette er området «mellom» de to grenene på hyperbelen $y = 1/x$

b) Hele $\mathbb{R}^2$ unntatt linjen $y = -x$

c) Området der $y > 2x$, dvs. området over linjen $y = 2x$

d) Hele $\mathbb{R}^2$

2 $D_f = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$, dvs. den åpne kulen med radius 2 og sentrum origo

3

4 a) $f(x, y) = e^{-r^2}$ b) $f(x, y) = r^2 \cos 2\theta$ c) $f(x, y) = 4r^2 + 5r^2 \sin^2 \theta$ d) $f(x, y) = 2r \cos\theta - 4r \sin\theta$

5 $f(x, y, z) = 1/\rho$. Nivåflatene er sfærer

6 $f(x, y, z) = z/r$. Nivåflatene er kjegler

Seksjon 9.2

3

a) Lukket, ikke kompakt

b) Åpen

c) Ingen av delene

d) Kompakt

Seksjon 9.3

1

a) $r \in [0, 1), \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

b) $r \in (4, \infty), \theta \in [-3\pi/4, \pi/4]$

2

a) Kulekoordinater: $\rho \in [1, 4], \phi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi)$

b) Sylinderkoordinater: $r \in [0, 1], z \in (-\infty, \infty), \theta \in [0, 2\pi)$

c) Sylinderkoordinater: $r \in [0, 3], z \in [0, 9 - r^2], \theta \in [0, 2\pi)$

3 Koordinatsystem: $x = 3 + r\cos\theta$, $y = 2 + r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$

4 $\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \theta]$

5 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2], r \in [0, 2\cos\theta]$

6

a) Koordinatsystem: $x = 1+\rho \sin\phi \cos\theta$, $y = 2+\rho \sin\phi \sin\theta$, $z = 1+\rho\cos\phi$. Beskrivelse: $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$

b) Koordinatsystem: $x = r\cos\theta$, $y = y$, $z = r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R}$

c) Koordinatsystem: $x = x$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], x \in [0, 5]$

7 $\theta \in [0, 2\pi), r \in [0, 1 - \cos\theta]$

9 $\theta \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \pi], \rho \in [0, 4\sin\phi]$

Seksjon 9.4

$\boxed{1}$

a) $21/11$

b) $e/2$

c) Fins ikke

d) 0

e) Fins ikke

f) 0

g) 0

h) Fins ikke

i) 1

Seksjon 9.5

$\boxed{1}$ $(0, 0)$

$\boxed{2}$ Punktene på de parallelle, rette linjene $x + y = n\pi + \pi/2$, der $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{7}$ $(x, y) = (2, 0)$

$\boxed{2}$

b) Sett $k = m + 1$ for å få det som trengs i beviset

Seksjon 9.7

$\boxed{1}$

a) $\partial f/\partial x = 4$, $\partial f/\partial y = 5$

b) $\partial f/\partial x = 16xy + 2$, $\partial f/\partial y = 8x^2 - 5$

c) $\partial f/\partial x = [y(x^2 + y^2)\cos xy - 2x \sin xy]/(x^2 + y^2)^2$, $\partial f/\partial y = [x(x^2 + y^2)\cos xy - 2y \sin xy]/(x^2 + y^2)^2$

d) $\partial f/\partial x = y \ln(xyz) + y + 5y^2$, $\partial f/\partial y = x \ln(xyz) + x + 10xy$, $\partial f/\partial z = xy/z$

e) $\partial f/\partial x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $\partial f/\partial y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\partial f/\partial z = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

f) $\partial f/\partial x_i = 2x_i e^{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ for $i = 1, \ldots, n$

$\boxed{2}$ $\partial f/\partial x = 5y^2$, $\partial f/\partial y = 10xy$

$\boxed{3}$

a) $\partial^2 f/\partial x^2 = 42x^5y^3$, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x = 21x^6y^2$,
$\partial^2 f/\partial y^2 = 6x^7 y$

b) $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x = 2ye^{-z}$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 2xe^{-z}$,
$\partial^2 f/\partial z^2 = xy^2e^{-z}$, $\partial^2 f/\partial x\partial z = \partial^2 f/\partial z\partial x = -y^2e^{-z}$, $\partial^2 f/\partial y\partial z = \partial^2 f/\partial z\partial y = -2xye^{-z}$

$\boxed{4}$

a) $(1, 2)$

b) $(1, -1)$

c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$

d) $(0, 0, 0)$, samt alle punkter (x, y, z) slik at $x, y, z \in \{-1, 1\}$

e) $(1/2, 3/2, 0)$

$\boxed{5}$ $x = y = z = 20$ m

$\boxed{6}$ Maksverdi 2925, minverdi -1575

$\boxed{7}$ $128/27$ og 0

$\boxed{8}$

b) $x = 5$m, $y = 10$m, $z = 10$m

$\boxed{9}$

a) $\partial A/\partial x = 28 - 4x - 3y$, $\partial A/\partial y = 28 - 4y - 3x$. De partielle deriverte er 0 i $(4, 4)$

b) Maksimumsverdi $A(4, 4) = 112$. Bør velge $x = y = 4$ meter

$\boxed{10}$ 8000

$\boxed{11}$ Fins ingen største verdi

$\boxed{12}$ $15/4$ cm

Seksjon 9.8

$\boxed{1}$

a) $(x, y) = (1, 2)$ er et sadelpunkt

b) $(1, 0)$ er et sadelpunkt, og $(0, -1)$ er et lokalt minimum. For å se at $(-1, 0)$ også er et sadelpunkt, merk at $f(-1, 0) = 0$ og at fortegnsskifte på y gir fortegnsskifte på $f(x, y)$

c) $(x, y) = (0, 0)$ er et globalt minimumspunkt

$\boxed{3}$ Stasjonært punkt $(x, y, z) = (-2/3, -1/3, 0)$. Siden egenverdiene til Hessematrisen er 6, 2 og -2, er dette et sadelpunkt

Seksjon 9.9

$\boxed{1}$ $\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ 8z^2 & 2 & 16xz \end{bmatrix}$, $F(x, y, z) = (-6, 76) + \begin{bmatrix} -12 & -3 & 2 \\ 72 & 2 & -48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $L(x, y) = \sqrt{2} + (1/\sqrt{2})(x-2) + \sqrt{2}(y - \pi/4)$. Ligning for tangentplanet: $z = \sqrt{2} + (1/\sqrt{2})(x-2) + \sqrt{2}(y-\pi/4)$

$\boxed{3}$

a) $L(x, y, z) = -210 - 300(x - 2) + 200(y + 1) - 82(z - 5)$

b) $L(x, y, z) = 1$

$\boxed{8}$ Trekantulikheten gir $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \leq |\mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})| + |\mathbf{E}(\mathbf{x})|$. Bruk så at det ved oppgave 7 fins $M > 0$ slik at $|\mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})| \leq M \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$, og til slutt at $|\mathbf{E}(\mathbf{x})| < |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ når $\mathbf{x}$ er tilstrekkelig nær $\mathbf{a}$.

Seksjon 9.10

$\boxed{1}$

a) 5

b) $1/5$

c) $\frac{1}{\sqrt{41}}(5, 4)$

$\boxed{2}$ $D_{\mathbf{u}}g = 4$, $D_{\mathbf{v}}g = 24/\sqrt{14}$. Vokser raskest i retningen $(1, 1, 1)$

$\boxed{3}$

a) $\nabla f = (2xy + 1/x, x^2 + 1/y)$

b) $\nabla f = (2xyz, x^2z, x^2y)$

$\boxed{4}$ Rett oppover: Retning $(-1, -2)$. Rett nedover: $(1, 2)$

Seksjon 9.11

$\boxed{1}$

a) $\mathbf{U}'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{G}'(\mathbf{U}(1, 1, 1)) = \mathbf{G}'(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{F}'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$

b) 400

$\boxed{2}$ For eksempel $\mathbf{F}$ gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (0, 0)$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Seksjon 9.13

$\boxed{1}$ $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3)$

$\boxed{2}$ $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1 - t^2)$, for $t \in [-1, 1]$

$\boxed{3}$ $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t)$

$\boxed{4}$ $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$\boxed{5}$ $\mathbf{r}(t) = (-2, 0) + t(3, 6) = (-2 + 3t, 6t)$

$\boxed{6}$ $\mathbf{r}(t) = (-1, 0, 5) + t(1, 2, -5) = (-1 + t, 2t, 5 - 5t)$

$\boxed{7}$ $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$

$\boxed{8}$ $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, for $t \in D_f$

$\boxed{9}$ Gen. løsning: $(x, y, z) = (24 + 27t, -9 - 11t, t)$. Dette er også en parametrisering av skjæringslinjen

$\boxed{10}$

a) Kurven har ligning $y = 4x^2$, for $x \geq 0$

b) Kurven har ligning $y = 6(x-2)$

c) Kurven har ligning $y = x^2$, for $x \in [-1, 1]$

d) Kurven har ligning $y^2 - x^2 = 1$, for $y \geq 0$

$\boxed{11}$

b) $\mathbf{r}'(4\pi/3) = (3/2, -\sqrt{3}/2)$, fart: $|\mathbf{r}'(4\pi/3)| = \sqrt{3}$. Tangentlinjen: $\mathbf{L}(t) = (\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (t - \frac{4\pi}{3})$. Glatt overalt unntatt i punktene $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

$\boxed{12}$ Fart: $\sqrt{2}$. Tangent: $\mathbf{L}(t) = (1, 0, 2\pi) + (0, 1, 1) \cdot (t - 2\pi)$. Enh.tangent: $(1/\sqrt{2})(0, 1, 1)$

Seksjon 9.14

$\boxed{3}$

a) Hastighetsvektor $\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Fart $\sqrt{2}$.

b) $\mathbf{T}(\pi) = (0, -1, 1)/\sqrt{2}$.

c) $\mathbf{a}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$, $\mathbf{a}(\pi) = (1, 0, 0)$.

d) Krumning $1/\sqrt{2}$, krumningsradius $\sqrt{2}$, hovednormal $[\sin t, \cos t, 0]$

e) 0 og $\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ $\mathbf{r}(s) = (1/\sqrt{13})(s, 2s, 3s)$ for $s \in [0, 5\sqrt{13}]$

$\boxed{7}$

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$

b) Krumning $\kappa = 4$, hovednormal $\mathbf{N} = [0, -1/2]$, krumningsradius $\rho = 1/4$

c) Krumningssenter $(0, 7/4)$, ligning for sirkelen $x^2 + (y - \frac{7}{4})^2 = \frac{1}{16}$

Seksjon 9.15

$\boxed{1}$ $x = u$, $y = v$, $z = 1 - u^2 - v^2$, dvs. $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$. Parameterområde: $u^2 + v^2 \leq 1$. Alternativ, mer elegant løsning: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^2)$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\boxed{2}$ $\mathbf{r} = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, parameterområde $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$

$\boxed{3}$ $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \frac{1}{5}(u + 3v - 1))$, parameterområde $u^2 + v^2 \leq 4$

$\boxed{4}$ $\mathbf{r}(u, v) = (u, 2 + u^2 + v^2, v)$, p.område $u^2 + v^2 \leq 1$

$\boxed{5}$ $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, v, (1/2)\sin u)$, parameterområde $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-1, 1]$

$\boxed{6}$ $\mathbf{r}(u, v) = (\sqrt{u^2 + v^2}, u, v)$, parameterområde $u \in [-1, 1]$, $v \in [-1, 1]$

$\boxed{7}$ $\mathbf{r}(\theta, u) = (\cos\theta, 1 + \sin\theta, u)$, parameterområde $\theta \in [0, 2\pi)$, $u \in [-1, 0]$

$\boxed{8}$ $\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0)$. Tangentplanet kan f.eks. parametriseres ved
$\mathbf{L}(u, v) = (1, u, v)$

$\boxed{9}$ $\mathbf{N} = (-\partial f/\partial u(a, b), -\partial f/\partial v(a, b), 1)$

$\boxed{12}$

c) $\partial\mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$,
$\partial\mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = (0, 0, 1)$. Vi ser at
$\partial\mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = s'(\pi/4)$ og $\partial\mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = h'(2)$.

Seksjon 9.17

$\boxed{1}$ $df/dx = [\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2xy^3]/(3x^2y^2)$,
$f'(1) = -2/3$. Tangentlinjen: $y - 1 = (-2/3)(x - 1)$

$\boxed{2}$

b) 0

$\boxed{3}$

a) $\nabla f = (3x^2yz^3, x^3z^3, 3x^3yz^2 + 5z^4)$

b) $\partial f/\partial x = -3x^2yz/(3x^3y + 5z^2)$, $\partial f/\partial y = -x^3z/(3x^3y + 5z^2)$

c) I motsatt retning av gradienten, dvs. i retning $(3, 7)$

Seksjon 9.20

$\boxed{1}$ Maksimum: $f(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}$. Minimum: $f(-4/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

$\boxed{2}$ $f(1/\sqrt{21}, -2/\sqrt{21}, 4/\sqrt{21}) = 2\sqrt{21}$ er maksimum,
$f(-1/\sqrt{21}, 2/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}) = -2\sqrt{21}$ er minimum

$\boxed{3}$ $(\pm 2^{1/4}, 2^{-1/4}, 2^{-1/4})$,
$(\pm 2^{1/4}, -2^{-1/4}, -2^{-1/4})$

$\boxed{4}$ Nærmest $(1/\sqrt{18}, 1/\sqrt{18})$ og
$(-1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18})$.
Lengst fra: $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ og $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Minste avstand: $1/3$. Største avstand: 1

$\boxed{5}$ $R^2 \cdot 3\sqrt{3}/4$

$\boxed{6}$ $(1/6, 2/3, 7/6)$

$\boxed{7}$ Høyeste $(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \sqrt{5} - 4)$,
laveste $(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\sqrt{5} - 4)$

$\boxed{12}$ $4/(3\sqrt{3})$

Seksjon 9.22

$\boxed{1}$ $y = ax + b$ der $a \approx -0.69$ og $b \approx 7.06$

$\boxed{3}$

a) $f(13/21, 19/21, -11/21) \approx 1.5$

b) $(x, y, z) = (-5t - 2, 4t + 3, t)$ for $t \in \mathbb{R}$

c) De to bibetingelsene definerer til sammen en rett linje i $\mathbb{R}^3$, og svaret på b) gir en parameterfremstilling for denne linjen. Siden $f(x, y, z)$ er kvadratet av avstanden fra (x, y, z) til origo, er minimumspunktet for f det punktet på linjen som ligger nærmest origo.

4

a) Maksimum $f(1, 0, 5) = 5$, minimum $f(-1, 0, 3) = 3$

b) $x - z + 4 = 0$ er ligningen for et plan, og den kan skrives $z = x + 4$. Vi er så ute etter å finne høyeste og laveste skjeæringspunkt mellom dette planet og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, når z-aksen peker oppover. Da ser vi at maksimum vil komme for $x = 1$, og minimum for $x = -1$. I begge tilfeller har vi $y = 0$.

5 $(0, 0)$ eneste stasjonære punkt

Seksjon 10.1

1

a) Ikke innhold 0

b) Innhold 0

5

a) $\frac{1}{2}$ for alle i, j.

b) 3

c) 3

d) Her er det lurt å tegne en figur. Området under grafen til f er som et hus med et skrått tak. Leddene i riemannsummen representerer «klosser» som til sammen stikker like mye over taket som de ligger under det.

Seksjon 10.2

1

a) 8

b) 8

c) Hvis alle grensene er konstante, kan integralet oppfattes både som type I og som type II.

2 $32/3$

3 $212/21$

4 $4/5$

5 a) Standardkoordinater: $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 2x]$ b) $8/15$

6 a) Standardkoordinater: $x \in [-2, 2]$, $y \in [x^2 - 4, 0]$ b) $128/7$

7 a) Standardkoordinater: $y \in [-4, 1]$, $x \in [3y, 4 - y^2]$ b) $1125/8$

Seksjon 10.3

1 a) Polarkoordinater: $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ b) 4π

2 a) Polarkoordinater: $\theta \in [0, \pi/4]$, $r \in [0, 2 - \cos\theta]$ b) $5\pi/8 + 1/8 - \sqrt{2}$

3 a) Standardkoordinater: $y \in [-1, 1]$, $x \in [1 - y^2, 2 - 2y^2]$ b) $8/105$

4 πR^2

5 π

6 πab

7 $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$

8 $2000\pi k/3$

9 $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$

10 $11/12$

11 $128/15$

12 $\pi/2$

13 $2\pi(8/3 - \sqrt{3})$

Seksjon 10.5

1 $9/8$

2 0

3 $3/20$

4 a) Standardkoordinater: $z \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, x]$ b) $1/16$

5 a) Standardkoordinater: $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $y \in [x^2, 4 - x^2]$, $z \in [0, y]$ b) $2752\sqrt{2}/105$

6 a) Sylinderkoordinater: $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$, $z \in [0, 1 - r^2]$ b) $\pi/6$

7 $\pi/2$

8 Sylinderkoordinater: $\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r dz) d\theta) dr = \pi/6$

9 Sylinderkooridnater: $\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{r\cos\theta + r\sin\theta + 5} r dz) d\theta) dr = 20\pi$

10 Kulekoordinater:$\int_1^2 (\int_0^{\pi/4} (\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi d\theta) d\phi) d\rho = \frac{14\pi}{3}(1 - 1/\sqrt{2})$

11 $51\pi/2$

12 Sylinderkoordinater: $2\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2\cos\theta} (\int_0^r r dz) dr) d\theta = 40/(9\sqrt{2})$

13 $(4/3)\pi abc$

14 $\pi k R^4$

Seksjon 10.6

1 $1/48$

2

a) Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, så er volumet absoluttverdien av determinanten $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Seksjon 10.7

1 $16\sqrt{5}/3$

2 $5\sin 2$

3 4

4 0

5 $\frac{5}{2}\sqrt{14}$

6 $4\sqrt{6}$

7 0

8 a) $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2 + 1, 2t^2 + 1)$, $t \in [0, 1]$ b) $(33^{3/2} - 1)/96$

9 a) $\mathbf{r} = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ b) 45π

10 a) C_1: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, \pi]$. C_2: $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$, $t \in [-1, 1]$ b) 2

11 $2\pi R$

12 $2\sqrt{2}\pi$

15 3π

Seksjon 10.8

1 $16/\sqrt{6}$

2 $\frac{1}{12}(6^{3/2} - 2^{3/2})$

3 $(\pi/240)(100\sqrt{5} + 4)$

4 $(31\pi/4)\sqrt{26}$

5 0

6 $10/3$

7 $\pi\sqrt{14}$

8 $4\pi r^2$

9 $\sqrt{2}\pi$

10 πabh

Seksjon 10.9

$\boxed{3}$ $\pi[\ln(1+\sqrt{2})+1]$

$\boxed{8}$ $2\pi(\ln 2+23/32)$

$\boxed{10}$ $2\pi(15/16+\ln 2)$

$\boxed{13}$ a) $140/3$ b) $(405/112, 0, 0)$

$\boxed{14}$ a) $32/3$, b) $(0, 47/32)$

$\boxed{15}$ a) $2\pi/3$, b) $(0, 0, 3/8)$

$\boxed{16}$ a) $2\sqrt{2}\pi^2$, b) $(0, 0, \frac{4}{3}\pi)$

$\boxed{17}$ a) $\frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1)$, b) $\left(0, 0, \dfrac{5}{4}-\dfrac{3(5^{5/2}-1)}{20(5^{3/2}-1)}\right)$

$\boxed{18}$ a) $\pi/2$, b) $(0, 0, 2/3)$

$\boxed{19}$ Ved å sammenlikne med halvkulen vi regnet på for fire oppgaver siden, ser vi at massen må være $1/4$ av massen i den oppgaven, og at $\overline{z}$ ved symmetri må være den samme. Videre gir symmetri at $\overline{x}=\overline{y}$. Vi trenger dermed bare regne ut en av dem, og faktum er at vi kan se ved symmetri at $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}$. Svarene blir: a) $\pi/6$, b) $(3/8, 3/8, 3/8)$

$\boxed{20}$

c) $4\pi/3$

$\boxed{22}$

b) Hint: Du kan sette hele x-integralet utenfor y-integralet, siden det bare er et konstant tall sett fra variabelen y sitt synspunkt. Skift så variabelnevn til x i y-integralet.

$\boxed{23}$

b) De er forskjøvet i forhold til hverandre, men de har samme form.

c) Noe av grunnen er at man vil unngå kanselleringseffekter av den typen vi ser i oppgave a). Siden den eneste forskjellen mellom grafene til f og g er en forskyvning, virker det urimelig å bruke en integraldefinisjon som gjør at integralet av f over $\mathbb{R}^2$ er 0, mens integralet av g over $\mathbb{R}^2$ divergerer.

Seksjon 11.1

$\boxed{3}$

a) $\nabla f=(2xy+5, x^2)$

b) $\nabla f=(-1, 2, 3)$

$\boxed{5}$ a) Ikke konservativt b) Fins ingen

$\boxed{6}$ a) Konservativt b) $f(x, y)=x^2y^2$

$\boxed{7}$ a) Konservativt b) $f(x, y)=\sin x+\sin y$

$\boxed{8}$ a) Konservativt b) $f(x, y)=-\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^{-1}$

$\boxed{9}$ a) Konservativt b) $f(x, y, z)=\sin(xy)+z^2y$

$\boxed{10}$ a) Ikke konservativt b) Fins ingen

$\boxed{11}$ a) Konservativt b) $f(x, y, z)=xy^4+xz+5y$

Seksjon 11.2

$\boxed{1}$ 66/35

$\boxed{2}$ π

$\boxed{3}$ 5/6

$\boxed{4}$ $2\pi + 2\pi^2$

$\boxed{5}$ 0

$\boxed{6}$ 0

$\boxed{7}$ $\mathbf{F} = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$

$\boxed{8}$

a) $f(x, y) = x^3 + y^2$ er en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$

b) -2

Seksjon 11.3

$\boxed{1}$ 0

$\boxed{2}$ -10

$\boxed{3}$ $3\pi/4$

$\boxed{4}$ 0

$\boxed{5}$ 224/15

$\boxed{7}$

a) Området R kan deles opp i to standardområder ved å kutte langs y-aksen, for $y \in [1, 2]$

b) 0

$\boxed{8}$

b) $3\pi/8$

$\boxed{9}$ πR^2

$\boxed{11}$

$\boxed{11}$ 3/2

$\boxed{12}$ 0

Seksjon 11.4

$\boxed{1}$ div $F = 2xy + 5$

$\boxed{2}$

a) curl $\mathbf{F} = (xz - 2z, -yz, -x^3)$, div $\mathbf{F} = 3x^2y + 1 + xy$, curl $\mathbf{F}(1, 2, -1) = (1, 2, -1)$, div $\mathbf{F}(1, 2, -1) = 9$

b) curl $\mathbf{F} = (0, -\cos x, 0)$, div $\mathbf{F} = -\sin x + \cos y$, curl $\mathbf{F}(1, 2, -1) = (0, -\cos 2, 0)$, div $\mathbf{F}(1, 2, -1) = -\sin 1 + \cos 2$

Seksjon 11.5

$\boxed{1}$ π

$\boxed{2}$ 4π

$\boxed{3}$ $\pi/4$

$\boxed{4}$ 2π

Seksjon 11.6

$\boxed{1}$ 0

$\boxed{2}$ $8\pi/3$

$\boxed{3}$ 16

$\boxed{4}$ 4π

$\boxed{10}$ 4

$\boxed{14}$ 4π

$\boxed{15}$ 0

Seksjon 11.7

$\boxed{1}$ 16π

$\boxed{2}$ 18π

$\boxed{3}$ $-1/2$

$\boxed{4}$ 0

$\boxed{5}$ 0

$\boxed{6}$ 0

$\boxed{7}$ Arealet: $\sqrt{2}\pi$. Arbeidet: π

$\boxed{11}$ 2π

Seksjon 11.8

$\boxed{1}$

a) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$

b) 0

$\boxed{2}$ 8

$\boxed{3}$ $f(x, y, z) = x + xy + xz^2$ er en potensialfunksjon

$\boxed{6}$

b) $\mathbf{G}(x, y, z) = (-y^2z - y + xy^2, -2xyz, 0)$

$\boxed{7}$ Resultatet følger *ikke*

$\boxed{8}$

b) 2π

$\boxed{14}$

a) 0

b) $2\pi/3$

$\boxed{15}$ 0

$\boxed{17}$

a) $-16/3$

b) 0

c) $-16/3$

d) -2π

Seksjon 12.1

$\boxed{1}$

a) Ja, dette er et vektorrom V. Metoden for å avgjøre dette, er å sjekke om aksiomene A1-A10 alle holder. For å sjekke A1, anta at $f, g \in V$. Vi har da at $f(5) = g(5) = 0$, og det gir

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 0 + 0 = 0$$

Altså er $f + g \in V$, så A1 er oppfylt. A2 sjekkes tilsvarende. For å sjekke A3, må vi undersøke om det finnes en funksjon $\mathbf{0} = f_0 \in V$ som oppfyller kravet vi stiller til nullvektoren. La $\mathbf{0} = f_0$ være nullfunksjonen gitt ved $f_0(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Hvis da $\mathbf{u} = g$ er en vilkårlig vektor i V, altså en funksjon, får vi at funksjonen $\mathbf{u}+\mathbf{0} = g + f_0$ oppfyller

$$(g + f_0)(t) = g(t) + f_0(t) = g(t) + 0 = g(t)$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Dette betyr at $g + f_0 = g$, dvs. $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$. Siden $\mathbf{u} \in V$ var vilkårlig, viser dette at A3 er oppfylt dersom vi velger nullvektoren $\mathbf{0}$ til å være nullfunksjonen f_0. Punktene A4-A10 sjekkes ved tilsvarende resonnementer.

b) Nei. Aksiomene A1, A2 og A4 holder ikke

c) Nei. Aksiomet A3 holder ikke

d) Ja

e) Nei. Aksiomene A1, A2 og A3 holder ikke

f) Ja

g) Ja

h) Ja

i) Nei. Aksiomene A1, A2, A3 og A4 holder ikke

$\boxed{2}$ $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Dimensjonen til underrommet er 2

$\boxed{4}$ $\dim U = 2$

$\boxed{5}$

a) Nei. A10 holder ikke

b) Nei. A5, A6 og A9 holder ikke

c) Nei

$\boxed{6}$ Nei. For eksempel er $(1, 1, 1) \in K$, men $(-1)(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin K$. Så aksiom A2 holder ikke

$\boxed{7}$ Nei. Aksiom A2 holder ikke

$\boxed{8}$

a) Ja

b) Ja

c) Nei, A1, A2 og A3 holder ikke

d) Nei. A1 holder ikke

e) Nei. A1 holder ikke

f) Ja

$\boxed{9}$

a) Ved A5 og deretter A4 har vi

$$(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Så likningen $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ har løsningen $\mathbf{x} = -\mathbf{v}$. For å vise at dette er den eneste løsningen, anta at $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da er $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$. Ved A4 fins en vektor $-\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Dette gir

$$(\mathbf{x} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = (\mathbf{y} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v})$$

Ved A6 gir dette

$$\mathbf{x} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = \mathbf{y} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v}))$$

Ved A4 fås fra dette $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + \mathbf{0}$. Til slutt gir A3 oss $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

b) Anta at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Ved A5 er da $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$, og vi får

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Ved A6 gir dette

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})),$$

som ved A4 gir $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$. A3 gir så $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) Ved A10, A9 og til slutt A10 igjen har vi

$$0\mathbf{v} + \mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (0 + 1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Vi legger til $-\mathbf{v}$ på begge sider og bruker A5, deretter A4 og til slutt A3:

$$\begin{aligned}
(0\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) \\
0\mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) \\
0\mathbf{v} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\
0\mathbf{v} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

d) Fra c) vet vi at dette holder for $r = 0$. Anta $r \neq 0$. Ved bruk av A10, A7, A8, A3, A7 og til slutt A10 får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + r\mathbf{0} &= 1\mathbf{v} + r\mathbf{0} = (r \cdot (1/r))\mathbf{v} + r\mathbf{0} \\
&= r \cdot ((1/r)\mathbf{v}) + r\mathbf{0} \\
&= r((1/r)\mathbf{v} + \mathbf{0}) \\
&= r((1/r)\mathbf{v}) = (r \cdot (1/r))\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Siden $\mathbf{v} \in V$ var vilkårlig, følger at $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ved unikhetsegenskapen til $\mathbf{0}$ (punkt (1) i teoremet).

e) Bruk av A9 i første overgang og c) i siste gir

$$(-r)\mathbf{v} + r\mathbf{v} = ((-r) + r)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Fra unikhetsegenskapen i a) følger at $(-r)\mathbf{v}$ må være lik $-(r\mathbf{v})$. På tilsvarende måte gir A8, A5, A4 og til slutt d)

$$r(-\mathbf{v}) + r\mathbf{v} = r((-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) = r(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Igjen følger fra a) at $r(-\mathbf{v})$ må være lik $-(r\mathbf{v})$.

10 At S spenner ut $\mathbb{P}_n$ er klart, fordi alle polynomer i $\mathbb{P}_n$ per definisjon er lineærkombinasjoner av funksjonene i S. Hint til å vise lineær uavhengighet for S: Bruk algebraens fundamentalteorem. Dimensjonen til $\mathbb{P}_n$ er $n+1$, fordi basisen S inneholder $n+1$ elementer

11

a) Hint: Per definisjon av begrepet basis må du vise at samlingen S er lineært uavhengig, og at den spenner ut $\mathbb{P}_\infty$. Hint til det første: Bruk algebraens fundamentalteorem

b) Ved a) har $\mathbb{P}_\infty$ en uendelig delmengde S som er lineært uavhengig. Det følger at ingen endelig samling av n elementer i $\mathbb{P}_\infty$ kan spenne ut hele V, for noe naturlig tall n.

12 Ja, den blir et vektorrom.

13

a) Ja

b) Nei

c) Nei

d) Ja

e) Nei

15

a) Nei

b) Nei

16 $\{p(x), q(x), x^2, 1\}$

17

a) Ja

b) Nei, ikke generelt (men det gjelder hvis $U_1 \subseteq U_2$ eller $U_2 \subseteq U_1$)

c) Ja

Seksjon 12.2

1

a) Ja

b) Ja

c) Nei

d) Ja

Seksjon 12.3

$\boxed{1}$

a) $\mathrm{Ker}\,(T) = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$, $\mathrm{Ran}\,(T) = \mathbb{R}^2$, T er ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har $\dim \mathrm{Ker}\,(T) = 1$ og $\dim \mathrm{Ran}\,(T) = 2$.

b) $ker(T) = \{0\}$ (dvs. kjernen består av kun nullfunksjonen), $\mathrm{Ran}\,(T) = \mathbb{P}_\infty$, T er injektiv, surjektiv, inverterbar. Vi har $\dim \mathrm{Ker}\,(T) = 0$ og $\dim \mathrm{Ran}\,(T) = \infty$.

c) $\mathrm{Ker}\,(T) = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{Ran}\,(T) = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$, T er injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har $\dim \mathrm{Ker}\,(T) = 0$ og $\dim \mathrm{Ran}\,(T) = 2$.

d) $\mathrm{Ker}\,(T) = \{f \mid f \text{ har grad } 0\}$, $\mathrm{Ran}\, T = \mathbb{P}_\infty$. T er ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har $\dim \mathrm{Ker}\,(T) = 1$ og $\dim \mathrm{Ran}\,(T) = \infty$.

e) $\mathrm{Ker}\,(T) = \{f \in \mathbb{P}_4 \mid f \text{ har grad } 0\}$, $\mathrm{Ran}\,(T) = \{f \in \mathbb{P}_4 \mid f \text{ har grad} \leq 3\}$. Ikke injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har $\dim \mathrm{Ker}\,(T) = 1$ og $\dim \mathrm{Ran}\,(T) = 4$.

$\boxed{2}$ $\{(-7, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 0, 1, 0), (-9, 0, -6, 0, 0, 1)\}$

$\boxed{4}$

b) Delpunktene refererer til den tidligere oppgaven: a) $\mathbf{x} = (5, 1)$ b) $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 0, 0) + c_1(-15, -6, 1, 0, 0) + c_2(3, 1, 0, 1, 0)$
$+ c_3(-25/2, -11/2, 0, 0, 1)$
c) $\mathbf{x} = (1, 0, 0, -1, 2) + c_1(-5, 1, 0, 0, 0) + c_2(1, 0, 1, 0, 0)$ d) Ingen løsning
e) $\mathbf{x} = (3, 0, 0) + c_1(-2, -2, 1)$.

$\boxed{5}$

a) $\{(-3, -5, -4, 1)\}$

b) $\{(-15, -6, 1, 0, 0),$
$(3, 1, 0, 1, 0), (-25/2, -11/2, 0, 0, 1)\}$

c) $\{(-5, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}$

$\boxed{6}$ $\{(-34, 4, -11)\}$

$\boxed{7}$

b) Kjernens dimensjon er 2 i alle tilfellene. For den første og den tredje avbildningen er en basis for kjernen $\{e^{-3t}, te^{-3t}\}$. De resterende definerer samme lineærtransformasjon, og en basis for kjernen til denne er $\{e^{2t}, e^{-3t}\}$

c) For den første $\mathbf{y} = \frac{2}{9} + c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$. Tilsvarende for de andre, se fasiten til de tilsvarende oppgavene i kapittel 7.8

$\boxed{8}$

b) $\left\{_{f,g}\right\}$ der $f(x) = 1$ og $g(x) = x$

$\boxed{9}$

b) $p(x) = x(x-1)$, dvs. basisen er $\{p\}$ der p er gitt ved $p(x) = x(x-1)$

Seksjon 12.4

$\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$

b) Vi har $[T(1)]_{B'} = [x]_{B'} = [0,1,0,0]$, $[T(x)]_{B'} = [x^2]_{B'} = [0,0,1,0]$ og $[T(x^2)]_{B'} = [x^3]_{B'} = [0,0,0,1]$. Ergo blir $[T]_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $T^{-1}(\{0\})$ er mengden av alle konstante funksjoner i $\mathbb{P}_3$, altså alle funksjoner på forem $f(x) = c$. T er ikke inverterbar.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $[T]_{B' \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $[T^2]_{B' \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\boxed{7}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Seksjon 12.5

$\boxed{1}$

a) $[\mathrm{id}]_{S \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $[\mathrm{id}]_{B \leftarrow S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $\begin{bmatrix} -40 & -24 & -15 \\ 13 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Seksjon 12.6

$\boxed{1}$ a) Basis $\{[-3, 1]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_1 = 9$, basis $\{[1, 2]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_2 = 2$
d) Basis $\{[1, 0], [0, 1]\}$ for egenverdien $\lambda = 2$.

$\boxed{2}$ Basis $\{[1, 0, 0]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_1 = -5$, basis $\{[0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_2 = 1$. Dimensjoner: 1 og 2.

$\boxed{3}$ $p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18$. Karakteristiske røtter 6 og 3.

$\boxed{4}$ Egenverdi $\lambda_1 = 1$ med egenbasis 1, algebraisk multiplisitet og geometrisk multiplisitet begge 1. Eegenverdi $\lambda_2 = 2$ med egenbasis $1 + x^2$, algebraisk multiplisitet 2 og geometrisk multiplisitet 1.

a) Alle funksjoner på formen $f(t) = ce^{\lambda t}$ er egenvektorer for T med egenverdi λ.

$\boxed{6}$ Ingen egenvektorer og egenverdier.

Seksjon 12.7

$\boxed{3}$ Ingen andre matriser enn identitetsmatrisen selv.

$\boxed{5}$ $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Seksjon 12.8

$\boxed{1}$

a) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

b) $M^n = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$, regn ut.

c) Se studenteksemplet.

$\boxed{2}$ a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$. Putt inn resten.

$\boxed{3}$ a) $P = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Putt inn resten.

$\boxed{4}$ Ta for eksempel matrisen fra oppgaven om kattekolonien.

$\boxed{5}$ Nei

Seksjon 12.9

$\boxed{1}$ $x(t) = (30/7)e^{5t} - (9/7)e^{-2t}$, $y(t) = (15/7)e^{5t} - (36/7)e^{-2t}$.

$\boxed{2}$ $x(t) = 2e^{5t} - e^{-2t} + 3$, $y(t) = e^{5t} - 4e^{-2t} + 5$.

$\boxed{3}$ En likevektsløsning for det inhomogene systemet blir $\mathbf{x}_s = (4, 2)$. Denne oppgaven fungerer som en litt usportslig forsmak på seksjon 14.5, fordi egenverdiene til koeffisientmatrisen i dette tilfellet blir komplekse. Det meste av regningen kan gjøres ved metoden her i seksjon 12.9, men du må gjøre noen triks til slutt for å omforme løsningen til reell form. Det er ikke så lett å finne ut hvordan dette kan gjøres på egen hånd, og det er enklere å bruke metoden fra seksjon 14.5. Følger vi den, får vi først den komplekse løsningsfunksjonen

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{(3+6i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{3t}(\cos 6t + i \sin 6t) \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t + i e^{3t}\sin 6t \\ -2i e^{3t}\cos 6t + 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t \\ 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{3t}\sin 6t \\ -2e^{3t}\cos 6t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

for det tilsvarende homogene difflikningssystemet. I følge metoden fra seksjon 14.5 er realdelen og imaginærdelen til $\mathbf{z}(t)$ reelle basisfunksjoner for det homogene systemet, og den generelle løsningen av det inhomogene difflikningssystemet blir dermed

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t \\ 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{3t}\sin 6t \\ -2e^{3t}\cos 6t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 6t \\ 2\sin 6t \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} \sin 6t \\ -2\cos 6t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

der c_1 og c_2 nå er reelle, ubestemte konstanter.

$\boxed{4}$ $$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$

a) $x'(t) = 6 - 0.03x(t)$, $y'(t) = 0.03x(t) - 0.005y(t)$

b) Stabilisering på 200 kg gift i Fugletjern og 1200 kg gift i Glittertjern.

$\boxed{7}$

a) Initialbetingelse $x(0) = 10$, $y(0) = 0$

b) Lievektstilstanden er $\overline{x} = \overline{y} = 0$. (Merk at vi her bruker $c > 0$.)

c) Fra uttrykket ser vi at begge egenverdiene er negative. Dette gjør at systemet konvergerer mot likevektstilstanden med 0 mg i både blod og vev. Dette er rimelig, fordi medikamentet skilles ut via leveren ($c > 0$).

Seksjon 12.10

$\boxed{1}$

b) Generell løsning av (2) er $x_1(t) = A_1e^{5t} + A_2e^{-7t}$, $x_2(t) = 5A_1e^{5t} - 7A_2e^{-7t}$. Generell løsning av (1) er $y(t) = x_1(t)$. Dette stemmer med regningen i seksjon 5.9.

$\boxed{2}$ $y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t} + (3/2)t + 3/4$

Seksjon 12.11

$\boxed{1}$

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -3$

c) $\{[1,2],[1-3]\}$

d) $\mathbf{x}_n = 2^n a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-3)^n a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

e) $y_n = C \cdot 2^n + D \cdot (-3)^n$

f) $y_n = 5 \cdot 2^n + 7 \cdot (-3)^n$

$\boxed{2}$

a) $\mathbb{S}$ er uendeligdimensjonalt

e) De tre signalene $\{2^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{1\}_{n=-\infty}^{\infty}$ og $\{2^{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ utgjør en basis. (Signalet i midten er det konstante signalet som har verdi 1 hele veien.)

Seksjon 12.12

$\boxed{1}$

a) Alle komponentene er ikke-negative, og søylene har sum 1

b) $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1/3 + (2/3)(-1/2)^n \\ 2/3 - (2/3)(-1/2)^n \end{bmatrix}$

c) Entydigheten følger fra forrige delpunkt. Likevektstilstanden er $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. Systemet konvergerer mot denne fordi faktorene $(-1/2)^n$ i $\mathbf{x}_n$ går mot 0.

$\boxed{2}$ Vi har

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\mathbf{x}_j = 1 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} M_{ij}\mathbf{x}_j = 1 \\ &= \sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}_j\left(\sum_{i=1}^{m} Mij\right) = \sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}_j \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

der vi i nest siste overgang brukte at M er en stokastisk matrise, og i siste overgang at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor.

Seksjon 12.13

Seksjon 12.14

$\boxed{1}$

a) Dette er et vektorrom

b) Dette er ikke et vektorrom

c) Dette er et vektorrom

$\boxed{2}$

a) $T(f) = 0$ er ekvivalent med at $-f'' = 0$, som igjen er ekvivalent med $f'' = 0$.

b) $B = \{1, x\}$. Dimensjonen til Ker T er 2.

c) $f(x) = \sin 3x$

d) Differensialligningen $-f''(x) = \lambda f(x)$ kan skrives $f'' + \lambda f = 0$. Denne har løsninger ulik $f = 0$ i V uansett verdi av λ

e) Alle f på formen $f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$, der A og B er reelle konstanter

f) Alle f på formen $f(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$, der A og B er reelle konstanter

$\boxed{3}$

c) Ved teoremet er den generelle løsningen $f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. En vilkårlig funksjon $f \in V$ er altså en løsning av differensialligningen hvis og bare hvis den er en lineærkombinasjon av de to funksjonene $e^{r_1 t}$ og $e^{r_2 t}$, og disse er åpenbart lineært uavhengige når $r_1 \neq r_2$. Tilsvarende for de neste delpunktene.

f) Vi har en basis for Ker T med to elementer i alle tilfellene. Altså er dimensjonen 2.

$\boxed{4}$ Vi kan bruke en matrise som representerer en rotasjon, for eksempel $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$

$\boxed{6}$

a) Fortsettelse av hint: Nei, det er ikke mulig, fordi $p - q$ har grad høyst n. Husk algebraens fundamentalteorem.

b) Hint: $\mathbb{P}_n$ og $\mathbb{R}^{n+1}$ har samme dimensjon.

c) $B = \{\cos \lambda x, \sin \lambda x\{$, dimensjon 2

Seksjon 13.1

$\boxed{1}$

a) Nei, I4 holder ikke

b) Ja

$\boxed{2}$

d) $-1/12$.

e) $\sqrt{8/15}$ og $\sqrt{1/7}$.

f) $\sqrt{59/70}$.

g) $\arccos(-(1/12)/\sqrt{8/105}) \approx 107^\circ$

$\boxed{3}$

a) Nei, I4 holder ikke.

b) Ja

$\boxed{4}$

a) Ja

b) $[p]_B = (\frac{1}{3}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{5}})$

c) $\sqrt{2/5}$

d) $\sqrt{2/5}$

$\boxed{9}$

b) $1/2$

$\boxed{10}$

c) Hint: Dette følger fra likningen $\arccos\theta = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle/(\|u\| \cdot \|v\|)$, fordi faktoren 7 i telleren forkortes mot to faktorer $\sqrt{7}$ i nevnveren. (Tallet 7 er selvsagt tilfeldig valgt)

Seksjon 13.2

$\boxed{1}$ Hvis du bruker vektorene i den rekkefølgen som er oppgitt i oppgaven, får du basisen $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/2, 1/2, 0)\}$. Hvis du bytter rekkefølgen på $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$, blir regningen mye enklere. Da får du standardbasisen $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$\boxed{2}$ $\{(1, 0, 1)/\sqrt{2}, (0, 1, 0)\}$

$\boxed{3}$ $\{(1/3, 2/3, 0, 2/3), (4, -1, 3, -1)/\sqrt{27}, (-2, -4, 3, 5)/\sqrt{54}\}$

$\boxed{4}$ Innsetting i teorem 3 med $\mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{q}_3$ som vektorene fra oppgave 3 og $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ som søylevektorene i A. (Du må da regne ut til sammen 6 indreprodukter.)

Seksjon 13.3

$\boxed{1}$

a) $(3, 0, 0)$

b) $(12/7, -6/7, 18/7)$

$\boxed{2}$ $\text{proj}_U \mathbf{v} = (1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (0, 0, 5)$.

$\boxed{3}$ $\text{proj}_U \mathbf{v} = (-2, 0)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (0, -1)$.

$\boxed{4}$

a) $\text{proj}_U \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{0}$

b) $\text{proj}_U \mathbf{v} = (8/3, 2/3, 10/3)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (7/3, 7/3, -7/3)$

c) $\text{proj}_U \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{v}$

$\boxed{5}$ $(-1, 3, -1)$

$\boxed{6}$

a) $(5/4)x^2$

b) Ved Gram-Schmidt får vi at de to polynomene $q_1 = 1$ og $q_2 = \sqrt{12}(x - 1/2)$ utgjør en ortonormal basis for U. Dette gir oss

$$\mathrm{proj}_U(x^2) = \langle q_1, x^2\rangle q_1 + \langle q_2, x^2\rangle q_2$$

Her får vi $\langle q_1, x^2\rangle = 1/3$ og $\langle q_2, x^2\rangle = 1/\sqrt{12}$. Innsatt gir dette $\mathrm{proj}_U(x^2) = x - 1/6$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9

b) $A^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = AB^2 = (AB)B = AB = A$. At $B^2 = B$ vises tilsvarende. Det følger også ved symmetri.

Seksjon 13.4

1

a) Fordi M er symmetrisk.

b) $\{2^{-1/2}[-1, 1, 0],\ 6^{-1/2}[-1, -1, 2],\ 3^{-1/2}[1, 1, 1]\}$

Seksjon 13.5

2

b) $\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3

a) $[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4

a) $[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

8 Hint: De to søylevektorene i M skal utgjøre en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$. Det er ikke så mange måter en slik basis kan ligge på.

Seksjon 13.6

1

a) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \Sigma = V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) \\ -1/3 & 0 & 4/(3\sqrt{2}) \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2

a) Regelen $(BC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ gir $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$. Dette viser at $A^{\mathrm{T}}A$ er symmetrisk.

b) $\|A\mathbf{v}\|^2 = (A\mathbf{v})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}) = \lambda \cdot 1 = \lambda$.

Seksjon 13.7

1 Alle punkter (x, y) på linjen $x + y = 1/2$.

2

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Bildet blir planet i $\mathbb{R}^3$ utspent av de to vektorene [1, 1, 0] og [0, 0, 1].

d) Tilærmet løsning $\mathbf{x} = (x, y) = (1, 0)$. Denne er entydig. Vi har $A\mathbf{x} = (1, 1, 0)$, og dette er projeksjonen av $(2, 0, 0)$ på bildet til A.

3 Du får den eksakte løsningen $(x, y) = (2, 1)$.

Seksjon 13.8

1 $s = -0.69t + 7.06$

2 $s = (1/2)t + 2$. I dette tilfellet er samlet kvadratavvik 0, fordi de gitte datapunktene ligger på en rett linje.

Seksjon 13.9

1

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \pi & -3/2 \\ -3/2 & -8 \end{bmatrix}$

2

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$

a) Ellipse

b) Hyperbel

c) Ellipse

d) Hyperbel

e) Parabel

Seksjon 13.10

$\boxed{4}$

b) $\lambda = 9$

d) $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, der A, B er vilkårlige reelle tall.

e) $B = \{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$, dimensjon 2

f) $\lambda = -9$

h) $f(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$, der A, B er vilkårlige reelle tall.

i) $B = \{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\}$, dimensjon 2

k) Egenvektorer: Funksjoner f på formen $f(x) = A\sin\frac{n\pi x}{a}$, der A er et reelt tall og n er et positivt helt tall. Tilhørende egenverdi: $\lambda = -(n\pi/a)^2$. Dimensjon av hvert egenrom: 1

l) Egenvektorer tilhørende ulike egenverdier er ortogonale

$\boxed{6}$

b) Hint: Du kan bruke $\cos x\cos y = (1/2)[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ på et av de tre tilfellene. Prøv å finne triks for de to andre også.

Seksjon 14.1

$\boxed{1}$

b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. Dimensjonen er 4.

$\boxed{2}$

a) Ja

b) Nei

c) Ja

$\boxed{3}$ $(z, w) = (4 + i, -1 + 2i)$

$\boxed{4}$ Egenverdi $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ med egenbasis $\{[i, 1]\}$, egenverdi $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ med egenbasis $\{[1, i]\}$.

$\boxed{5}$

c) Alle er -1

d) 1 og -1 for alle tre

e) Henholdsvis $\{(1, -1), (1, 1)\}$, $\{(i, 1), (1, i)\}$ og $\{(1, 0), (0, 1)\}$

$\boxed{6}$ $M = \frac{1}{2}(q + r)\sigma_1 + \frac{i}{2}(q - r)\sigma_2 + \frac{1}{2}(p - s)\sigma_3 + \frac{1}{2}(p - s)I$

$\boxed{7}$

a) $A = \begin{bmatrix} 50 & -1 \\ 1 & 50 \end{bmatrix}$

d) Omtrent 78 uker

Seksjon 14.2

$\boxed{1}$

a) $2 - 3i$.

b) $3i$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

a) Ja

b) Nei

$\boxed{4}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ -5i & 6-6i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & i & 1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Seksjon 14.3

$\boxed{1}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2-i & 5-i \end{bmatrix}$, nei

b) $\begin{bmatrix} -i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, nei

c) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, ja

d) $\begin{bmatrix} 5 & 2+3i \\ 2-3i & 7 \end{bmatrix}$, ja

$\boxed{2}$ Nei

$\boxed{3}$

a) Ja

b) Ja

c) Ja

d) Ja

$\boxed{4}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{6}$ Determinantene er henholdsvis $1, i, i$ og 1. De inverse er matrisenes adjungerte.

$\boxed{7}$ Siden matrisene er unitære, utgjør søylevektorene deres en ortonormal egenbasis.

$\boxed{8}$

a) Fordi M er hermitisk.

b) $\{2^{-1/2}[i, 0, 1], 2^{-1/2}[-i, 0, 1], [0, 1, 0]\}$

Seksjon 14.4

$\boxed{2}$

a) $B = \{(1/\sqrt{2})[1, i], (1/\sqrt{2})[1, -i]\}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

Seksjon 14.5

$\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2e^{2t}\sin 2t \\ e^{2t}\cos 2t \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos 2t \\ e^{2t}\sin 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = -k\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + 7k\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7k \\ k \end{bmatrix}$

Seksjon 14.6

$\boxed{1}$

a) Har du tenkt nok nå?