Utsatt eksamen MAT1120 18.01.2024

Løsningsforslag

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Nul A består av de vektorene $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

altså

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matlab-utskriften gir at

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 5x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Setter vi $x_3 = t$, kan den generelle løsningen av likningen $A\vec{x} = \vec{0}$ med andre ord skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ fri parameter.}$$

Altså er $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for Nul A.

b) Siden de to første søylene i A er pivot-søyler, følger at

$$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for Col A. For å finne en ortonormal basis, bruker vi Gram-Schmidt:

$$\vec{w}_1 = \vec{b}_1 = (2, -2, 2, 2)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{w}_1\|} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{16}} (2, -2, 2, 2) = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$$

$$\vec{w}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{q}_1$$

$$= (1, -1, 1, -1) - 1 \cdot \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -3)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|} \vec{w}_2 = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}(1, -1, 1, -3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, -3)$$

Så

$$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, -3) \right\}}}$$

c) Fra a) vet vi at

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$(BA)\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = B\left(A\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= B\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Med andre ord er alle vektorer på formen

$$k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med $k \neq 0$ en reell skalar egenvektorer for matrisen BA med egenverdi 0. Et konkret eksempel på en slik egenvektor er

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 2

Gitt $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, skal finne SVD.

(1) $A^TA = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(2) Egenverdier til A^TA : $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$

Singulærverdier for A : $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$

(3) Ortonormal egenbasis for A^TA :

$\vec{v}_1 = (0, 1)$ (egenverdi $\lambda_1 = 4$)

$\vec{v}_2 = (1, 0)$ (— " — $\lambda_2 = 1$)

(4) $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/10 \\ -8/10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/10 \\ 6/10 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi må utvide samlingen $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. Vi ser at

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har lengde 1 og indreprodukt 0 med både $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$. Kan altså bruke denne.

(5) Vi har nå SVD-en

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}, \text{ der } a \in (0,1).$$

a)

$$M^2 = \begin{array}{cc|cc} & & a & 1 \\ & & 1-a & 0 \\ \hline a & 1 & a^2+1-a & a \\ 1-a & 0 & a(1-a) & 1-a \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a^2+(1-a) & a \\ a(1-a) & 1-a \end{bmatrix}}}$$

Siden alle elementene i M er i intervallet $[0,1]$, og summen av elementene i hver søyle er 1, er M en stokastisk matrise. Fra uttrykket for M^2 ser vi dessuten at alle elementene i M^2 er ulik 0. Så M er regulær.

b)

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \text{ gir } \begin{cases} aq_1 + q_2 = q_1 & \text{I} \\ (1-a)q_1 = q_2 & \text{II} \end{cases}$$

II innsatt i I gir $aq_1 + (1-a)q_1 = q_1$, dvs. $q_1 = q_1$.

Altså er kravet $q_2 = (1-a)q_1$. Så

$$\underline{\underline{\vec{q} = \frac{1}{2-a}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \end{bmatrix}}}$$

(Satte her først $q_1 = 1$, delte så på $2-a$ for å få komp. sum 1)

er en likevektstilstand for M. (Den er unik.)

c) At $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{q}$ uansett startvektor $\vec{x}_0$, følger fordi vi fra a) vet at M er en regulær stokastisk matrise.

(Alternativt kan man vise dette ved å finne en egenbasis for matrisen M, altså diagonalisere den.)

Oppgave 4

a) At $B = \{\cos 2x, \sin 2x\}$ spenner ut V er klart, siden V per definisjon består av funksjoner f som er lineær-kombinasjoner av $\cos 2x$ og $\sin 2x$. For å vise at $\cos 2x$ og $\sin 2x$ er lineært uavhengige, anta at

$$a(\cos 2x) + b(\sin 2x) = 0, \quad \text{der } a, b \in \mathbb{R}.$$

Innsetting av $x = 0$ gir $a \cdot \cos 0 + b \cdot \sin 0 = 0$, dvs. $a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$, altså $a = 0$.

Innsetting av $x = \frac{\pi}{4}$ gir $a \cdot \cos \frac{\pi}{2} + b \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0$, dvs. $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$, altså $b = 0$.

Konklusjonen er at $a = b = 0$, så vi har vist at $\cos 2x$ og $\sin 2x$ er lineært uavhengige. Altså er de en basis for V.

b) Gitt $T : V \to V$ ved $T(f) = f'' + f$.

For alle $f, g \in V$ og alle $r \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} T(f+g) &= (f+g)'' + (f+g) \\ &= f'' + g'' + f + g \quad \text{(ved vanlig derivasjonsregel)} \\ &= (f'' + f) + (g'' + g) = T(f) + T(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(rf) &= (rf)'' + (rf) \\ &= r \cdot f'' + rf \quad \text{(ved vanlig derivasjonsregel)} \\ &= r \cdot (f'' + f) = r \cdot T(f) \end{aligned}$$

Altså er T en lineærtransformasjon.

c) At f er en egenvektor for T med egenverdi λ betyr at

$$T(f) = \lambda f \quad , \quad \text{altså} \quad f'' + f = \lambda f.$$

Hvis vi setter $f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ får vi

$$f'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$$

$$f''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$$

$$= -4(a\cos 2x + b\sin 2x) = -4 \cdot f(x)$$

Innsatt dette blir likningen $f'' + f = \lambda f$ slik:

$$-4f + f = \lambda f \quad , \quad \text{dvs.} \quad -3f = \lambda f$$

Altså blir f en egenvektor med egenverdi λ hvis og bare hvis

$$\lambda = -3 \quad \text{og} \quad f \neq \vec{0}.$$

Dermed har vi vist at T har den ene egenverdien

$$\underline{\underline{\lambda = -3}},$$

og at egenrommet tilhørende denne egenverdien er <u>hele vektorrommet V</u>.