UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 1. desember 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Matlab-utskrift
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til Matlab-utskriften der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. La $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2,$$

der koeffisientene c_0, c_1 og c_2 er reelle tall. Betrakt datapunktene gitt ved

$$(t_1, s_1) = (1, 2), \quad (t_2, s_2) = (2, 1), \quad (t_3, s_3) = (3, 0) \quad \text{og} \quad (t_4, s_4) = (4, 2).$$

a) Vis at kravet $p(t_i) = s_i$ for $i = 1, 2, 3, 4$ gir likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at dette likningssystemet ikke har noen løsning.

b) Begrunn at verdiene av c_0, c_1 og c_2 som minimaliserer kvadratavviket

$$S = \sum_{i=1}^{4} \Big[p(t_i) - s_i \Big]^2$$

gis av likningen

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}.$$

Finn verdiene av c_0, c_1 og c_2 som minimaliserer S.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. La θ være et reelt tall, og la A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix}$$

a) La $A^\intercal$ være den transponerte av matrisen A. Finn egenverdiene til matrisen $A^\intercal A$ og singulærverdiene til A.

b) Finn en singulærverdidekomposisjon $A = U\Sigma V^\intercal$ av A.

Gi en geometrisk beskrivelse av hva transformasjonen $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gjør med en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Oppgave 3. La V være vektorrommet av funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen

$$f(x) = ae^x + be^{-x},$$

der a og b er reelle tall, med de vanlige vektorromsoperasjonene $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ og $(kf)(x) = k\cdot f(x)$ for funksjonsrom, der $k \in \mathbb{R}$. La funksjonene cosh og sinh være definert ved

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{og} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a) La $B = \{e^x, e^{-x}\}$. Begrunn at B er en basis for V.

b) La $B' = \{\cosh x, \sinh x\}$. Begrunn at B' også er en basis for V, og finn overgangsmatrisen P fra B til B', altså matrisen som er slik at

$$[f]_{B'} = P \cdot [f]_B \qquad \text{for alle } f \in V.$$

c) La $T : V \to V$ være definert ved $T(f) = f'$, der f' er den deriverte av f. Vis at T er en lineærtransformasjon, og at avbildningen $T^2 : V \to V$ definert ved $T^2(f) = T(T(f))$ er identitetstransformasjonen på V. Forklar hvorfor T er inverterbar.

d) Finn matrisene $[T]_B$ og $[T]_{B'}$ til T med hensyn på B og B'. Finn egenverdiene til T. Avgjør om B og B' er egenbasiser for T, det vil si avgjør om de består av egenvektorer for T.

e) Vi definerer $\langle f, g\rangle$ for $f, g \in V$ ved å la $\langle f, g\rangle$ være prikkproduktet av koordinatvektorene $[f]_{B'}$ og $[g]_{B'}$ i $\mathbb{R}^2$, altså

$$\langle f, g\rangle = ([f]_{B'})^\intercal \, [g]_{B'}$$

Vis at $\langle f, g\rangle$ er et indreprodukt på V, og at basisen B' er ortonormal med hensyn til dette indreproduktet.

f) Finn $\langle e^{-x}, \sinh x\rangle$ med indreproduktet definert i e). Vis at for alle indreprodukter på V slik at basisen B' er ortonormal, vil indreproduktet av e^{-x} og $\sinh x$ ha den samme verdien.

SLUTT

VEDLEGG TIL EKSAMEN MAT1120 FREDAG 1. DESEMBER 2023: MATLAB-UTSKRIFT

```
A =

    1    1    1    2

    1    2    4    1

    1    3    9    0

    1    4   16    2

>> B=rref(A)

B =

    1    0    0    0

    0    1    0    0

    0    0    1    0

    0    0    0    1

C =

     4    10    30     5

    10    30   100    12

    30   100   354    38

>> D=rref(C)

D =

    1.0000         0         0    5.2500

         0    1.0000         0   -3.8500

         0         0    1.0000    0.7500
```