

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag: Lørdag 18. november 2023 (prøveeksamen)
Tid for eksamen: 09.00–15.00 (gjennomgang kl. 15 i auditorium 5)
Oppgavesettet er på 2 sider.
Vedlegg: Matlab-utskrift
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til Matlab-utskriften der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finne en basis for nullrommet $\text{Nul}A$ og en basis for kolonnerrommet $\text{Col}A$ til matrisen A .
- Finne en ortonormal basis for $\text{Nul}A$.

Oppgave 2. La $V = \mathbf{P}_1$ være vektorrommet av polynomer

$$p(t) = c_0 + c_1t,$$

der $c_0, c_1 \in \mathbf{R}$. La avbildningene $T : V \rightarrow V$ og $S : V \rightarrow V$ være definert ved

$$T(p) = p(1) + p(0)t \quad \text{og} \quad S(p) = p + t.$$

- Vis at T er en lineærtransformasjon, men at S *ikke* er en lineærtransformasjon.
- Finne matrisen $[T]_B$ til T med hensyn på basisen $B = \{1, t\}$ for V .

(Fortsettes på side 2.)

- c) Begrunn at $B' = \{1+t, 1-t\}$ også er en basis for V , og finn matrisen $[T]_{B'}$ til T med hensyn på B' .
- d) Finn overgangsmatrisen P fra B til B' , altså matrisen som er slik at $[p]_{B'} = P \cdot [p]_B$ for alle $p \in V$. Finn også overgangsmatrisen Q fra B' til B , altså matrisen Q som er slik at $[p]_B = Q \cdot [p]_{B'}$ for alle $p \in V$.

Oppgave 3. Onkel Skrue har funnet et gammelt brev som forteller om en nedgravd skatt. Brevet sier:

Kongen, som var glad i tallmagi, befalte at skatten skulle graves ned på breddegrad B og lengdegrad L slik at

$$5B + 8L = 200, \quad 2B + L = \frac{1029}{2} \quad \text{og} \quad B + 6L = \frac{1696}{5}.$$

Det klarte vi ikke, men vi gjorde så godt vi kunne.

Til tross for sin brede erfaring fra økonomiske beregninger, som gjør at han aldri regner feil, klarer ikke Skrue å finne B og L ved hjelp av opplysningene i brevet.

- a) Gi en mulig forklaring på Skrues manglende suksess.

I frustrasjon spør onkel sine tre nevøer Ole, Dole og Doffen om hjelp. Guttene merker seg særlig brevetts ord "så godt vi kunne". De slår opp i Hakkespettbokens kapittel *Hvordan løse uløselige problemer*, og ved hjelp av dette kommer de frem til at B og L kanskje oppfyller likningene

$$30B + 48L = \frac{11841}{5} \quad \text{og} \quad 48B + 101L = \frac{41497}{10}$$

- b) Forklar hvordan guttene kan ha regnet seg frem til disse likningene. (Hakkespettboken har et omfattende kapittel om lineær algebra.) Finn breddegraden B og lengdegraden L likningene leder til.
- c) Doffen synes det er rart at den tallglade kongen ikke ganget opp nevnerne i likningene for B og L , slik at de fikk den penere formen

$$5B + 8L = 200, \quad 4B + 2L = 1029 \quad \text{og} \quad 5B + 30L = 1696.$$

Til sin store overraskelse finner Doffen at dette leder til *andre* likninger for B og L enn de fra b), med helt andre (og geografisk umulige) løsninger for breddegrad og lengdegrad. Forklar dette.

Oppgave 4. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \end{bmatrix},$$

der $t \in (0,1)$ er et reelt tall. Finn en singularverdidekomposisjon (SVD) $A = U\Sigma V^T$ av matrisen A .

SLUTT

VEDLEGG TIL PRØVEEKSAMEN MAT1120 LØRDAG 18. NOVEMBER 2023: MATLAB-UTSKRIFT

A =

```
-2    6    2    -1
 1   -3   -4    2
-5   15    0    0
-1    3   -2    1
```

>> B=rref(A)

B =

```
1    -3    0    0
0     0    1   -1/2
0     0    0    0
0     0    0    0
```

>> 5*200 + 1029 + 1696/5

ans = 11841/5

>> 8*200 + 1029/2 + 6*(1696/5)

ans = 41497/10

M =

```
30    48    11841/5
48    101   41497/10
```

>> R=rref(M)

R =

```
1     0    551/10
0     1    149/10
```

>> 5*200 + 4*1029 + 5*1696

ans = 13596

>> 8*200 + 2*1029 + 30*1696

ans = 54538

M =

```
66    198    13596
198    968    54538
```

>> R=rref(M)

R =

```
1     0    1627/17
0     1    625/17
```