UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 18. januar 2024
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Matlab-utskrift
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til Matlab-utskriften der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}A$ til A.

b) Finn en ortonormal basis for søylerommet $\mathrm{Col}A$ til A.

c) La B være en vilkårlig reell (3×4)-matrise. Begrunn at (3×3)-matrisen

$$BA$$

har egenvektorer med egenverdi 0, og finn en slik egenvektor.

Oppgave 2. Finn en singulærverdidekomposisjon (SVD) av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 6/5 \\ 3/5 & -8/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. La $a \in (0, 1)$ være et reelt tall, og la M være matrisen gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Beregn matrisen M^2. Vis at M er en regulær stokastisk matrise.

b) Finn en likevektstilstand for M, altså en likevektstilstand $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ for Markov-kjeden gitt ved $\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n$ for $n \geq 0$, der $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ er en gitt startvektor.

c) Vis at for alle startvektorer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ har vi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{q}.$$

Oppgave 4. La V være vektorrommet av funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen

$$f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

der a og b er reelle tall, med de vanlige vektorromsoperasjonene $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ og $(kf)(x) = k \cdot f(x)$ for funksjonsrom, der $k \in \mathbb{R}$.

a) La $B = \{\cos 2x, \sin 2x\}$. Begrunn at B er en basis for V.

b) La $T : V \to V$ være definert ved

$$T(f) = f'' + f,$$

der f'' er den andrederiverte av f. Vis at T er en lineærtransformasjon.

c) Vis at T har nøyaktig én egenverdi λ, og finn denne egenverdien. Finn også egenrommet tilhørende egenverdien λ for T.

SLUTT

VEDLEGG TIL EKSAMEN MAT1120 TORSDAG 18. JANUAR 2024: MATLAB-UTSKRIFT

C =

2	1	-3	0
-2	-1	3	0
2	1	-3	0
2	-1	7	0

>> D=rref(C)

D =

1	0	1	0
0	1	-5	0
0	0	0	0
0	0	0	0