MAT1120 – Notat 1 – Tillegg til avsnitt 4.4

Dette notatet tar utgangspunkt i følgende teorem fra boka.

Teorem 8 [i avsn. 4.4]:

Anta at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en (ordnet) basis for et vektorrom V.
Da er koordinatavbildningen $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ fra V inn i $\mathbb{R}^n$ en isomorfi,
dvs at denne avbildningen er lineær, 1-1 og på $\mathbb{R}^n$.

Poenget med dette teoremet er at mange spørsmål om V kan nå oversettes til et tilsvarende spørsmål om $\mathbb{R}^n$ ved hjelp av koordinatavbildningen. Vi illustrerer dette med et nyttig resultat, som ikke står nevnt eksplisitt i boka:

Korollar til Teorem 8 [i avsn. 4.4]:

Anta at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en (ordnet) basis for et vektorrom V og la S være en endelig delmengde av V, bestående av p forskjellige vektorer, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$. Betrakt da mengden

$$S_{\mathcal{B}} := \Big\{ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} \Big\}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^n$, og $n \times p$ matrisen $[S_{\mathcal{B}}]$ som har vektorene i $S_{\mathcal{B}}$ som sine kolonnevektorer, dvs

$$\big[S_{\mathcal{B}}\big] := \Big[[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} \Big].$$

Da gjelder:

- *S utspenner $V \iff S_{\mathcal{B}}$ utspenner $\mathbb{R}^n$.*
- *S er lineært uavhengig i $V \iff S_{\mathcal{B}}$ er lineært uavhengig i $\mathbb{R}^n$.*
- *S er en basis for $V \iff S_{\mathcal{B}}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$*
  $\iff p = n$ og matrisen $[S_{\mathcal{B}}]$ er invertibel.

Noen kommentarer.

1. Fra den siste påstanden i korollaret ser vi at dersom V har en basis $\mathcal{B}$ med n elementer, så er antall vektorer i en hvilken som helst annen basis for V også lik n; tallet n kalles *dimensjonen* til V. Dette er temaet for avsnitt 4.5.
2. Når S er en basis for V, kalles den invertible matrisen $[S_{\mathcal{B}}]$ for en *koordinatskifte-matrise*, eller for en *basisskifte-matrise*. Slike matriser skal vi studere nærmere i avsnitt 4.7.
3. Vi kan avgjøre om $S_{\mathcal{B}}$ utspenner $\mathbb{R}^n$, eller om $S_{\mathcal{B}}$ er lineært uavhengig, eller om $S_{\mathcal{B}}$ er basis for $\mathbb{R}^n$, ved å beregne den reduserte trappeformen $R = \texttt{rref}([S_{\mathcal{B}}])$ til matrisen $[S_{\mathcal{B}}]$ og se på pivotstrukturen til R. Vi vet nemlig at:
   - $S_{\mathcal{B}}$ utspenner $\mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow\ R$ har pivoter i alle sine rader,
   - $S_{\mathcal{B}}$ er lineært uavhengig $\ \Leftrightarrow\ R$ har pivoter i alle sine kolonner,
   - $S_{\mathcal{B}}$ er basis for $\mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow\ p = n$ og $R = I_n$ (identitetsmatrisen).

   Dette betyr at hvis vi beregner $[S_{\mathcal{B}}]$, og deretter R, så kan vi bruke korollaret til å avgøre om S utspenner V, om S er lineært uavhengig, og om S er en basis for V. Merk dette kan av og kan avgjøres på en direkte måte, uten å følge fremgangsmåten ovenfor (som ofte vil være regningskrevende). Det kan derfor være lurt å tenke seg litt om før man setter i gang.

Eksempel 1. La $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$, og betrakt mengden

$$S = \{\, 1 - t^2 \,,\, t - t^2 \,,\, 2 - t - t^2 \,\}.$$

Da er

$$S_{\mathcal{B}} = \Big\{[1-t^2]_{\mathcal{B}}, [t-t^2]_{\mathcal{B}}, [2-t-t^2]_{\mathcal{B}}\Big\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

så $\big[S_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$

Utregning gir at $R := \texttt{rref}([S_{\mathcal{B}}])$ er gitt ved $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Vi ser at R ikke har pivoter i alle rader, og heller ikke pivoter i alle kolonner. Dermed kan vi konkludere fra korollaret (i kombinasjon med punkt 3. i kommentarene) at S hverken utspenner $\mathbb{P}_2$ eller er lineært uavhengig.

En lineær avhengighetsrelasjon mellom vektorene i S kan vi lett lese fra matrisen R. Vi ser nemlig at vi har følgende relasjon:

$$\mathbf{k}_3 = 2\,\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \qquad \text{(der } \mathbf{k}_j\text{-ene betegner kolonnevektorene til R).}$$

Tilsvarende lineær avhengighetsrelasjon må da gjelde mellom vektorene i S. Dette betyr at

$$2 - t - t^2 = 2\,(1 - t^2) - (t - t^2)\,,$$

som utvilsomt er riktig. Hadde vi klart å innse dette med en gang, hadde vi ikke trengt å gjøre utregningene ovenfor for å komme frem til at S er lineært avhengig.

Betrakt nå mengden

$$S' = \{1 - t^2,\, t - t^2,\, 2 - t + t^2\}$$

(som fremkommer ved å forandre et fortegn i siste elementet i S).

Vi finner da at $[S']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

Utregning gir at $R' := \texttt{rref}([S'_{\mathcal{B}}]) = I_3$.

Dette gir at $S'_{\mathcal{B}}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og vi kan konkludere fra korollaret at S' er en basis for $\mathbb{P}_2$.

$\square$

Eksempel 2. Betrakt $V = \text{Span}\,\{\sin t, \sin 2t, \sin 3t\}$ og mengden

$$S = \Big\{2\sin t - \sin 2t + \sin 3t, -\sin t + \sin 2t - 3\sin 3t\Big\}\,.$$

Vi lurer på om S er lineært uvahengig.

Skal vi bruke korollaret for å besvare dette spørsmålet, må vi først finne en basis for V.

Den opplagte kandidaten er mengden $\mathcal{B} = \{\sin t, \sin 2t, \sin 3t\}$, siden den, per definisjon, utspenner V. Vi trenger da bare å sjekke at $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.

Vi antar derfor at

$$c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 3t = 0 \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R},$$

og må da vise at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Ved å sette inn f.eks. $t = \pi/6$, $t = \pi/4$ og $t = \pi/2$ i tur og orden, får vi følgende likningssett:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, c_2 + c_3 &= 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\, c_1 + c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\, c_3 &= 0 \\ c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Utregning gir at dette homogene systemet bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (m.a.o. at koeffisientmatrisen til systemet er invertibel, jf. IMT[1]). Dette viser at at $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig. Vi kan altså konkludere med at $\mathcal{B}$ er en basis for V.

Det er nå opplagt at $[S_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Enkel utregning gir at $R := \texttt{rref}([S_{\mathcal{B}}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Siden R har pivoter i begge sine kolonner kan vi konkludere med at $S_{\mathcal{B}}$, og derfor også S, er lineært uavhengig.

I dette eksemplet er det enklere å begrunne direkte at S er lineært uavhengig ved å observere at ingen av funksjonene i S er et multiplum av den andre. Dette kan vi innse ved å sette inn f.eks. $t = \frac{\pi}{4}$ og $t = \frac{\pi}{2}$ i begge funksjonene; alternativt kunne vi skissert grafene til disse to funksjonene for å overbevise oss om det.

$\square$

Det er flere oppgaver i boka som kan løses enkelt ved å velge samme fremgangsmåte som i disse to eksemplene. Se f.eks. oppgavene 4.4.27–34 og 4.5.34.

[1] IMT er en forkortelse for Invertibel Matrise Teoremet.

Til slutt går vi gjennom hovedpunktene i *beviset for korollaret.*

Vi er gitt en ordnet basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ for V.

Videre er $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\} \subseteq V$, $S_\mathcal{B} = \{\, [\mathbf{u}_1]_\mathcal{B}, \dots, [\mathbf{u}_p]_\mathcal{B} \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ og $[S_\mathcal{B}] = \big[\ [\mathbf{u}_1]_\mathcal{B} \ \cdots \ [\mathbf{u}_p]_\mathcal{B}\ \big]$ er den assosierte $n \times p$ matrisen.

- *Vi begynner med en enkel observasjon.*

La $\mathbf{u} \in V$ og $c_1, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$. Da har vi at

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p \tag{1}$$

$$\iff [\mathbf{u}]_\mathcal{B} = \big[c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p\big]_\mathcal{B}$$

(siden koord. avb. er 1-1)

$$\iff [\mathbf{u}]_\mathcal{B} = c_1[\mathbf{u}_1]_\mathcal{B} + \cdots + c_p[\mathbf{u}_p]_\mathcal{B} \tag{2}$$

(siden koord. avb. er lineær).

- *Vi kan nå begrunne den første ekvivalensen i korollaret.*

Anta at S utspenner V.
La $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Siden koordinatavbildningen er på $\mathbb{R}^n$, finnes det en $\mathbf{u} \in V$ slik at $[\mathbf{u}]_\mathcal{B} = \mathbf{x}$. Videre, fordi S utspenner V, finnes det $c_1, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$ slik at (1) holder. Men da får vi fra (2) at

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_\mathcal{B} = c_1[\mathbf{u}_1]_\mathcal{B} + \cdots + c_p[\mathbf{u}_p]_\mathcal{B},$$

m.a.o. at $\mathbf{x}$ er en lineær kombinasjon av vektorene i $S_\mathcal{B}$. Dette viser at $S_\mathcal{B}$ utspenner $\mathbb{R}^n$ (siden $\mathbf{x}$ var en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$).

Omvendt, anta at $S_\mathcal{B}$ utspenner $\mathbb{R}^n$.
La $\mathbf{u} \in V$. Da finnes $c_1, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$ slik at (2) holder. Men da holder også (1), så $\mathbf{u}$ er en lineær kombinasjon av vektorene i S. Dette viser at S utspenner V (siden $\mathbf{u}$ var en vilkårlig vektor i V).

Dermed har vi vist den første ekvivalensen.

- *Den andre ekvivalensen vises på tilsvarendemåte (jf. oppgave 4.4.25 i boka).*

- *Til slutt begrunner vi den siste påstanden i korollaret, som består av to ekvivalenser.*

Den første er grei: S er en basis for V hvis og bare hvis V er utspent av S, samtidig som S er lineært uavhengig; med det vi nå vet, er dette ekvivalent med at $S_\mathcal{B}$ utspenner $\mathbb{R}^n$, samtidig som $S_\mathcal{B}$ er lineært uavhengig, altså at $S_\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

Den andre ekvivalensen er nå en enkel konsekvens av invertibelmatriseteoremet (IMT). For å begrunne dette nærmere, setter vi $R := \texttt{rref}([S_\mathcal{B}])$.

Anta først at $S_\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, m.a.o. at $S_\mathcal{B}$ utspenner $\mathbb{R}^n$ og $S_\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.
Vi vet da at R vil ha pivoter i *alle* rader og i *alle* kolonner (jf. kommentar 3.). Dette betyr at $p = n$ og $R = I_n$. Men da sier IMT at $[S_\mathcal{B}]$ invertibel.

Omvendt, anta at $p = n$ og $[S_\mathcal{B}]$ er invertibel.

Da er $R = I_n$ (igjen ved IMT), så $S_\mathcal{B}$ utspenner $\mathbb{R}^n$ (siden $R = I_n$ har pivoter i alle rader) og $S_\mathcal{B}$ er lineært uavhengig (siden $R = I_n$ har pivoter i alle kolonner). Dermed er $S_\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

□