

MAT1120 – Notat 2 – Tillegg til avsnitt 5.4

Dette notatet utfyller bokas avsnitt 5.4 om matriserepresentasjonen (også kalt koordinatmatrisen) til en lineær avbildning mellom to endeligdimensjonale vektorrom utstyrt med hver sin basis. En slik matrise inneholder all informasjon om avbildningen, noe følgende teorem illustrerer.

Teorem A.

La $T : V \rightarrow W$ være en lineær avbildning mellom to vektorrom V og W ,

der $\boxed{\dim V = n < \infty \text{ og } \dim W = m < \infty}$.

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for V og la $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ en basis for W . (Begge basisene betraktes som ordnet i den oppgitte rekkefølgen).

La M være matriserepresentasjonen til T m.h.p. basisene \mathcal{B} og \mathcal{C} (jf. avsnitt 5.4). Så

$$M = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix},$$

og M er den entydige bestemte $m \times n$ matrisen som tilfredstiller at

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in V.$$

Videre, la $T_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være gitt ved

$$T_M(\mathbf{x}) = M \mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Da gjelder følgende:

- 1) T er 1-1 $\iff T_M$ er 1-1.
- 2) T er på W $\iff T_M$ er på \mathbb{R}^m .
- 3) T er en isomorfi $\iff T_M$ er en isomorfi $\iff n = m$ og M er invertibel.

Anta videre at $\boxed{n = m, \text{ så } \dim V = \dim W}$. Da gjelder følgende:

- 4) T er en isomorfi $\iff M$ er invertibel,
og da er koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. \mathcal{C} og \mathcal{B} gitt ved M^{-1} .
- 5) T er en isomorfi $\iff T$ er 1-1 $\iff T$ er på W .

Kommentar 1. Vi minner om at følgende holder:

- T_M er 1-1 $\iff \text{Nul } M = \{\mathbf{0}\} \iff$ kolonnene til M er lineært uavhengige.
- T_M er på $\mathbb{R}^m \iff \text{Col } M = \mathbb{R}^m \iff$ kolonnene til M utspenner \mathbb{R}^m .

I begge tilfellene kan dette avgjøres ved å betrakte pivotstrukturen i den reduserte trappeformen til M . Sammen med Teorem A kan dette brukes til å bestemme egenskapene til T . □

Kommentar 2. Det kan vises at kjernen til T har samme dimensjon som kjernen til T_M , mens billedrommet til T har samme dimensjon som billedrommet til T_M .

Dette betyr at

$$\begin{aligned}\dim(\text{Ker } T) &= \dim(\text{Ker } T_M) = \dim(\text{Nul } M), \\ \dim(T(V)) &= \dim(T_M(\mathbb{R}^n)) = \dim(\text{Col } M) = \text{rang } M.\end{aligned}$$

Fra rangteoremet for M får vi derfor at

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(T(V)) = \dim(\text{Nul } M) + \text{rang } M = n = \dim V,$$

m.a.o. at

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(T(V)) = \dim V.$$

Denne formelen kalles ofte for *dimensjonsformelen* for T .

□

Om beviset for Teorem A.

1): Anta at T er 1-1. Vi skal vise at T_M er 1-1.

Betrakt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og anta at $T_M(\mathbf{x}) = T_M(\mathbf{y})$, d.v.s. $M\mathbf{x} = M\mathbf{y}$.

Velg da $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ slik at $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$. Vi får at

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M\mathbf{x} = M\mathbf{y} = M[\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v}')]_{\mathcal{C}}$$

og det følger at $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$ (siden koordinatavbildningen m.h.p. \mathcal{C} er 1-1).

Dette medfører at $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ (siden T er 1-1), og det gir at

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}.$$

Dette viser at T_M er 1-1. Den omvendte implikasjonen i 1) vises på en liknende måte.

2): Denne ekvivalensen overlates som en oppgave.

3): Den første ekvivalens følger av 1) og 2).

Anta så at T_M er en isomorfi, m.a.o. at T_M er 1-1 og på \mathbb{R}^m .

Da er $\text{Nul } M = \{\mathbf{0}\}$, så $\text{rang } M = n$ (ved rangteoremet for M). Videre er $\text{Col } M = \mathbb{R}^m$, så $\text{rang } M = m$. Altså er $n = m$, og M er invertibel ved IMT.

Dette viser implikasjonen \implies i den andre ekvivalensen. Den omvendte implikasjonen følger direkte av IMT.

Vi antar fra nå av at $n = m$.

4): Selve ekvivalensen følger av 3).

Anta at T er isomorfi, så M er invertibel, og la N være koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. basisene \mathcal{C} og \mathcal{B} . Vi må vise at $N = M^{-1}$.

La $\mathbf{w} \in W$ og la $\mathbf{v} = T^{-1}(\mathbf{w})$, så $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. Da er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = N[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} \quad (*)$$

samtidig som

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

så

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} \quad (**)$$

Fra likningene (*) og (**) får vi at $N[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = M^{-1}[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$. Siden \mathbf{w} var en vilkårlig vektor i W , følger det at $N = M^{-1}$, som ønsket.

5): Anta at T er 1-1. Da er T_M 1-1 (ved 1)), dvs $\text{Nul } M = \{\mathbf{0}\}$. IMT gir da at $\text{Col } M = \mathbb{R}^n$, dvs at T_M er på \mathbb{R}^n . Altså er T_M en isomorfi. Fra 3) kan vi konkludere med at T er en isomorfi.

Anta nå at T er på W . Da er T_M på \mathbb{R}^m (ved 2)), så tilsvarende argumentasjon med IMT gir at T_M er en isomorfi, og dermed at T er en isomorfi.

De to andre implikasjonene som gjenstår å begrunne i 5) er opplagt riktige. □

Eksempel 1 (Om polynominterpolasjon).

La a_0, a_1, \dots, a_n være $n + 1$ forskjellige reelle tall, og betrakt lineærabildningen $T : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definert ved

$$T(p) = (p(a_0), p(a_1), \dots, p(a_n)), \quad p \in \mathbb{P}_n.$$

Da er T en isomorfi.

Vi kan nemlig argumentere som følger:

Siden $\dim \mathbb{P}_n = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, sier 5) i Teorem A at det er nok å sjekke at avbildningen T er 1-1.

Anta derfor at $T(p) = T(q)$, der $p, q \in \mathbb{P}_n$. Da er

$$p(a_j) = q(a_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Dette betyr at $(p - q)(a_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, så polynomet $p - q$ har $n + 1$ forskjellige røtter. Siden $p - q$ har grad høyst lik n , må da $p - q$ være 0-polynomet, dvs $p = q$. Dette viser at T er 1-1.

At avbildningen T er en isomorfi betyr at dersom vi får oppgitt $n + 1$ reelle tall b_0, b_1, \dots, b_n , m.a.o. en vektor $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ i \mathbb{R}^{n+1} , så fins det alltid *nøyaktig* ett polynom $p \in \mathbb{P}_n$ som er slik at $T(p) = \mathbf{b}$, d.v.s. som er slik at

$$p(a_0) = b_0, p(a_1) = b_1, \dots, p(a_n) = b_n,$$

altså som er slik at grafen til p går gjennom punktene

$$(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n).$$

Vi sier da at polynomet p *interpolerer* de gitte punktene. Det å finne et slikt polynom kalles gjerne *polynominterpolasjon* og er et viktig problem i mange anvendelser.

Vi kan nå bruke siste del av 4) i Teorem A til å bestemme polynomet $p \in \mathbb{P}_n$ som er slik at $T(p) = \mathbf{b}$.

Først lar vi M være koordinatmatrisen til T m.h.p. basisen $\mathcal{B} = \{1, t, \dots, t^n\}$ for \mathbb{P}_n og standardbasisen \mathcal{C} for \mathbb{R}^{n+1} .

Det er rett frem å regne ut at

$$M = \begin{bmatrix} T(1) & T(t) & \dots & T(t^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Matriser på denne formen (og transponerte av slike) kalles ofte *Vandermonde matriser*.

Siden T er en isomorfi vet vi fra Teorem A at M er invertibel. Dette kunne vi også ha funnet ut ved å sjekke at $\det M \neq 0$. Men det krever en del arbeid¹ som vi slipper nå.

For å bestemme p kan vi gå i gang med regne ut M^{-1} og så bruke at

$$[p]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}(\mathbf{b})]_{\mathcal{B}} = M^{-1}\mathbf{b}.$$

Merk at vi kan også finne $[p]_{\mathcal{B}}$ ved å bestemme løsningen av systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$; denne løsningsmetoden er absolutt å foretrekke dersom det er bare et bestemt interpolerende polynom vi skal beregne og n er stor.

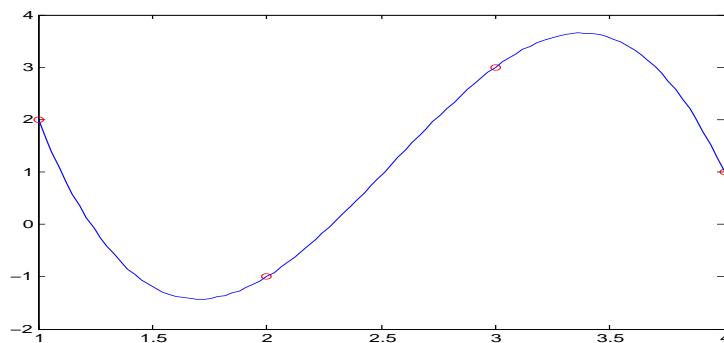


Figure 1: Grafen til 3. grads polynomet som interpoler punktene $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$. Polynomet er regnet ut ved hjelp av Matlab og oppsettet beskrevet i dette eksemplet. Se Matlab-heftet for MAT1120.

¹Man finner at $\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ (prøv selv!); slike determinanter kalles ofte *Vandermonde determinanter*.

La oss si vi ønsker å finne 3. grads polynomet p som interpolerer punktene $(1, 2), (2, -1), (3, 3), (4, 1)$. Vi har da at

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan da enkelt løse systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved hjelp av Matlab og finner derved koeffisientene til p (se Matlab-heftet). Grafen til p er tegnet i Figur 1.

Dersom vi skal bestemme polynomet p i \mathbb{P}_2 som er slik at

$$p(0) = b_0, p(1) = b_1, p(2) = b_2,$$

der b_0, b_1 og b_2 er oppgitte tall, har vi at

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Utregning gir at

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$[p]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \mathbf{b} = (b_0, -\frac{3}{2}b_0 + 2b_1 - \frac{1}{2}b_2, \frac{1}{2}b_0 - b_1 + \frac{1}{2}b_2).$$

Det gir

$$p(t) = b_0 + (-\frac{3}{2}b_0 + 2b_1 - \frac{1}{2}b_2)t + (\frac{1}{2}b_0 - b_1 + \frac{1}{2}b_2)t^2.$$

□

La oss nå se på spesialtilfellet der $W = V$ og $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Del 4) i Teorem A gir oss følgende:

Korollar til Teorem A.

Anta at $T : V \rightarrow V$ er en lineær avbildning, der $0 \neq \dim V < \infty$, og at \mathcal{B} er en (ordnet) basis for V .

La $[T]_{\mathcal{B}}$ betegne koordinatmatrisen til T m.h.p. \mathcal{B} , som i læreboka. Da har vi at

$$T \text{ er en isomorfi} \iff [T]_{\mathcal{B}} \text{ er invertibel.}$$

Videre, når T er en isomorfi, har vi at koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. \mathcal{B} gitt ved

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^{-1}.$$

Eksempel 2 (Om derivasjon og antiderivasjon).

La $V = \text{Span} \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ og betrakt lineærabildningen $D : V \rightarrow V$ gitt ved

$$D(f) = f' \quad (= \text{den deriverte av } f).$$

Det er lett å sjekke at $\mathcal{B} = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ er lineært uavhengig. Siden \mathcal{B} også utspenner V (per definisjon av V) er \mathcal{B} en basis for V .

Videre har vi at

$$D(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x,$$

$$D(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x.$$

Det gir

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har determinant lik 2, så den er invertibel. Vi kan derfor konkludere med at D er en isomorfi, og at

$$[D^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([D]_{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hvis $g \in V$, kan vi finne $f = D^{-1}(g)$ ved

$$[f]_{\mathcal{B}} = [D^{-1}]_{\mathcal{B}} [g]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [g]_{\mathcal{B}}.$$

Funksjonen f tilfredstiller da at $f' = g$, dvs at f er en *antiderivert* av g .

Når f.eks. $g(x) = e^x \sin x$ er $[g]_{\mathcal{B}} = (1, 0)$ og vi finner vi at

$$[f]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er $f(x) = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)$. Det betyr at

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$$

noe vi kunne også ha kommet frem til ved delvis integrasjon. □

Et annet nyttig resultat om koordinatmatriser (som såvidt er omtalt på slutten av avsnitt 5.4) forteller oss hva som skjer med koordinatmatrisen når vi skifter basis:

Teorem B.

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom, $V \neq \{0\}$, og la $T : V \rightarrow V$ være en lineær avbildning.

Anta at \mathcal{B} og \mathcal{B}' begge er basiser for V . La $P = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ betegne koordinatskiftematriksen fra \mathcal{B} til \mathcal{B}' . Da har vi at

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P [T]_{\mathcal{B}} P^{-1} \quad (*)$$

(Dette viser spesielt at $[T]_{\mathcal{B}}$ og $[T]_{\mathcal{B}'}$ er similære matriser).

Bevis. Formelen er enkel å utlede, bare man husker hvordan de involverte matrisene virker:

For alle $\mathbf{v} \in V$ har vi at

$$[T]_{\mathcal{B}'} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = P [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = P [T]_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P [T]_{\mathcal{B}} P^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$$

Dermed må $[T]_{\mathcal{B}'} = P [T]_{\mathcal{B}} P^{-1}$. □

Eksempel 3.

La $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen med standardmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La \mathcal{B} betegne standardbasisen for \mathbb{R}^2 , så $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

La så \mathcal{B}' være basisen for \mathbb{R}^2 gitt ved $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Vi skal beregne koordinatmatrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$.

Vi lar da Q være koordinatskiftematriksen fra \mathcal{B}' til \mathcal{B} , m.a.o. $Q := P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$.

Siden \mathcal{B} er standardbasisen er det opplagt at

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nå vet vi at $P := P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ er lik Q^{-1} . Det gir oss at

$$P = Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ved (*) i Teorem B får vi at

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}'} &= P [T]_{\mathcal{B}} P^{-1} = Q^{-1} A Q \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Eksempel 4 (Speilinger i planet).

La $a \in \mathbb{R}$ og la $L : y = ax$ være linjen i \mathbb{R}^2 som går gjennom origo og har stigningstall a .

La $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen som speiler vektorer loddrett gjennom L (S kalles *speilingen om L*). Vi ønsker å finne standardmatrisen A til S .

Det går an å finne A direkte ved hjelp av noen geometriske betraktninger, men vi kan gjøre dette nokså smertefritt ved å bruke Teorem B.

Poenget er at det finnes en basis \mathcal{B} for \mathbb{R}^2 som er naturlig å velge med tanke på hvordan S virker:

Vi velger først en retningsvektor for L , f.eks. $\mathbf{v}_1 = (1, a)$.

Deretter velger vi en normal vektor for L , f.eks. $\mathbf{v}_2 = (-a, 1)$, og setter $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Siden \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er loddrett på hverandre, er de lineært uavhengige, så de danner en basis for \mathbb{R}^2 .

Det er da opplagt at $S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ og $S(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$ (lag en skisse!). Vi får derfor at

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [S(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} & [S(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} & [-\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La nå \mathcal{B}' betegne standardbasisen for \mathbb{R}^2 og sett $P = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$.

Da er $P = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

Ved (*) i Teorem B får vi at

$$A = [S]_{\mathcal{B}'} = P [S]_{\mathcal{B}} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Ved å gange ut finner vi at A er gitt ved

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

Skriver vi a på formen $a = \tan \theta$ der $|\theta| < \pi/2$, finner vi, etter en liten omregning med trigonometriske formler, at

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

□

Legg merke til at basisen \mathcal{B} i Eksempel 4 er en basis for \mathbb{R}^2 som består av egenvektorer for S , og at $[S]_{\mathcal{B}}$ er diagonal (jf. Teorem 8 i avsn. 5.4).

Mer generelt, kan vi betrakte en lineær avbildning $T : V \rightarrow V$ der $V \neq \{0\}$ er endeligdimensjonalt.

Anta da at V har en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ som består av egenvektorer for T . Hvis $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ er de tilhørende egenverdiene for T , m.a.o.

$$T(\mathbf{v}_1) = d_1\mathbf{v}_1, \dots, T(\mathbf{v}_n) = d_n\mathbf{v}_n,$$

så er $[T]_{\mathcal{B}}$ lik diagonalmatrisen $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ med tallene d_1, \dots, d_n langs hoveddiagonalen. Vi sier derfor at avbildningen T er *diagonaliserbar* når denne antagelsen er oppfylt.

Legg merke til at hvis \mathcal{B}' er en hvilken som helst annen basis for V , så er da matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$ diagonaliserbar, fordi (*) i Teorem B sier at $[T]_{\mathcal{B}'}$ er similær med $[T]_{\mathcal{B}}$, som er diagonal.

Omvendt, hvis vi antar at det finnes en basis \mathcal{B}' for V slik at matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$ er diagonaliserbar, så kan det vises at det fins en basis for V som består av egenvektorer for T , m.a.o. at T er diagonaliserbar. Dette er ikke spesielt vanskelig, men overlates som en oppgave for interesserte.

Tilsammen gjelder det altså at T er diagonaliserbar hvis og bare hvis det fins en basis for V som er slik at matriserepresentasjonen til T m.h.p. denne basisen er en diagonal matrise.

Oppgaver

Oppgave 1. Betrakt en lineæravbildning $T : V \rightarrow W$ mellom to endeligdimensjonale vektorrom.

(i) Begrunn at hvis T er 1-1, så er $\dim V \leq \dim W$.

(ii) Begrunn at hvis T er på W , så er $\dim V \geq \dim W$.

Oppgave 2. La $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(p(t)) = p(t) + 2t^2 p(t).$$

Er T 1-1 og/eller på \mathbb{P}_4 ?

Oppgave 3. La $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(p) = (p(1), p'(1), p''(1)).$$

Er T 1-1 og/eller på \mathbb{R}^3 ?

Oppgave 4. La $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)t + (4a_1 + a_2)t^2.$$

Begrunn at T er en isomorfi og bestem en formel for $T^{-1}(q)$ når $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

Oppgave 5 [M]. La $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(p) = (p(-2), p(3), p(1), p(0)).$$

Merk at Eksempel 1 i dette notatet viser at T er en isomorfi.

(i) Finn polynomet $p \in \mathbb{P}_3$ som er slik at $T(p) = (0, 1, 0, 1)$.

(ii) Lag en skisse av grafen til p over intervallet $[-3, 3]$ og sjekk at p interpolerer punktene $(-2, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

(iii) Finn en formel for $T^{-1}(\mathbf{b})$ når $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$.

Oppgave 6. La $V = \text{Span} \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ være som i Eksempel 2 og betrakt lineæravbildningen $D^2 : V \rightarrow V$ gitt ved

$$D^2(f) = f'' \quad (= \text{den dobbelt deriverte av } f).$$

(i) Finn koordinatmatrisen til D^2 m.h.p. basisen $\mathcal{B} = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ for V .

(ii) Begrunn at D^2 er en isomorfi og angi koordinatmatrisen til $(D^2)^{-1}$ m.h.p. basisen \mathcal{B} .

(iii) Finn en løsning av diff.likningen $f''(x) = e^x \cos x$.

Oppgave 7. La L være linjen i \mathbb{R}^2 gitt ved likningen $y = 2x$ og la $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved at $P(\mathbf{x})$ er vektoren i L som fåes ved å avbilde \mathbf{x} loddrett på L . (Avbildningen P kalles *den ortogonale projeksjonen av \mathbb{R}^2 på L*).

Finn standardmatrisen til P .

Oppgave 8. La W være planet i \mathbb{R}^3 som går gjennom origo og har $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ som normalvektor.

(i) Bestem to vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W$ slik at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}\}$ blir en basis for \mathbb{R}^3 .

La $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen som er slik at $S(\mathbf{x})$ er vektoren som fåes ved å speile \mathbf{x} loddrett gjennom planet W .

(ii) Bestem $[S]_{\mathcal{B}}$.

(iii) Bruk Teorem B til å finne et uttrykk for standardmatrisen til S .

(iv) La $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen gitt ved at $Q(\mathbf{x})$ er vektoren i W som fåes ved å avbilde \mathbf{x} loddrett på W . (Avbildningen Q kalles *den ortogonale projeksjonen av \mathbb{R}^3 på W*).

Finn standardmatrisen til Q .

(v) Hva er sammenhengen mellom S og Q ?