MAT1120 H23

Obligatorisk oppgavesett nr. 1 (av 2)

Innleveringsfrist: Torsdag 21. september 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner den, eller om du skriver den direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av TEX eller LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal innholde navn, emne og oblignummer. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer.

I oppgaver der du bruker Matlab/Python, må du legge ved utskrift av kjøring og eventuell programkode sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at du også leverer et kjøreeksempel dersom du blir bedt om det, for at det skal være mulig å se hvilket resultat programmet gir. En besvarelse som viser mangelfulle Matlabferdigheter kan bli underkjent selv om den tilfredsstiller de andre kriteriene. Det er tillatt å bruke Python i stedet for Matlab, men husk at det vil kunne bli stilt spørsmål som krever kjennskap til Matlab på eksamen.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser. For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1

La V være mengden av alle funksjoner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som oppfyller det gitte kravet. Avgjør om V blir et vektorrom når vi utstyrer det vektoraddisjonen definert ved $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ alle $f, g \in V$ og skalarmultiplikasjonen definert ved $(af)(x) = a \cdot f(x)$ for alle $f \in V$ og $a \in \mathbf{R}$.

a) Krav: $f(1) \geq 0$

b) Krav: f er deriverbar

Oppgave 2

La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

og definer lineærtransformasjonen $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ ved

$$T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

a) Fra pensum vet vi at kjernen $\operatorname{Ker} T$ til T er et underrom av $\mathbf{R}^4$. Finn en basis for $\operatorname{Ker} T$. Forklar kort hvorfor $\operatorname{Ker} T$ blir det samme som nullrommet til matrisen A.

b) Fra pensum vet vi at rekkevidden $\operatorname{Ran} T$ til T er et underrom av $\mathbf{R}^3$. Finn en basis for $\operatorname{Ran} T$. Forklar kort hvorfor $\operatorname{Ran} T$ blir det samme som søylerommet $\operatorname{Col} A$ til matrisen A, altså bildet til A.

c) Finn den generelle løsningen av ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{der} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Finn den generelle løsningen av ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad \text{der} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Lag en figur som viser hvordan $\operatorname{Ran} T$, vektoren $\mathbf{b} = (5, 0, 0)$ og vektoren $\mathbf{c} = (2, 1, 1)$ ligger i $\mathbf{R}^3$.

Oppgave 3

Finn en (2×2)-matrise A slik at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for A med egenverdi lik datoen $(1, ..., 31)$ du ble født, og

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for A med egenverdi lik måneden $(1, ..., 12)$ du ble født.

Oppgave 4

a) Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $(n \times n)$-matrisen M med egenverdi λ, så er $\mathbf{v}$ en egenvektor for matrisen

$$M^3 + 17M^2 - 5M + 13I$$

med egenverdi

$$\lambda^3 + 17\lambda^2 - 5\lambda + 13,$$

der I er identitetsmatrisen av størrelse $(n \times n)$.

b) Vis at hvis λ er en egenverdi for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så må λ oppfylle likningen

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Dette kalles *den karakteristiske ligningen* til A. Begrunn at A ikke har noen egenbasis, dvs. begrunn at det ikke finnes noen basis for $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer for A.

c) *Cayley-Hamiltons teorem* sier at alle kvadratiske matriser tilfredsstiller sin egen karakteristiske ligning, selv matriser som ikke har en egenbasis. Sjekk at dette holder for matrisen A, dvs. vis at

$$A^2 - 2A + I = 0,$$

der I er identitetsmatrisen, og 0 på høyre side står for nullmatrisen.

Oppgave 5

a) Vis at mengden av reelle (2×2)-matriser blir et vektorrom V når vi bruker vanlig addisjon av matriser og multiplikasjon av matriser med reelle tall som vektorroms-operasjoner.

b) Vis at

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for vektorrommet V. Hva er dimensjonen til V?

La $\theta \in \mathbf{R}$. Definer funksjonen $T : V \to V$ ved at

$$T(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot A \qquad \text{for alle matriser } A \in V.$$

c) Vis at T er en lineærtransformasjon. Beskriv kort hva som er sammenhengen mellom bildet (søylerommet) til matrisen A og bildet (søylerommet) til matrisen $T(A)$.

d) (NB: Stoffet du trenger for å løse denne, er ferdig gjennomgått på forelesningen torsdag 14. september.) Vis at matrisen $[T]_B$ til T i basisen B er gitt ved

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

SLUTT