Løsningsforslag oblig 1 MAT1120 høst 2023

Oppgave 1

a) Dette blir ikke et vektorrom, blant annet er A2 ikke oppfylt. For å vise dette, la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = 1 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da er $f(1) = 1 \geq 0$, så $f \in V$. Men

$$((-1)f)(1) = (-1) \cdot f(1) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$$

Altså er $(-1) \cdot f \notin V$.

b) Dette blir et vektorrom. Hvis $f, g \in V$ og $a \in \mathbb{R}$, får vi

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{og} \quad (af)' = a \cdot f'$$

ved vanlige derivasjonsregler. Dette viser at $f+g \in V$ og $af \in V$, så A1 og A2 er oppfylt (lukkethet). Siden nullfunksjonen

$$f = 0$$

gitt ved $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er deriverbar, har V en nullvektor. Dvs. A3 er oppfylt. Videre er

$$(-f)' = -f'$$

så hvis $f \in V$, slik at f er deriverbar, er også $-f$ deriverbar. Altså $-f \in V$. Så A4 er oppfylt.

De resterende aksiomene A5 – A10 følger fordi de er oppfylt på hele vektorrommet V_0 av funksjoner

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{(ingen ekstrakrav)}$$

under de gitte operasjonene.

Oppgave 2

a) Radreduksjon ved Matlab gir (se vedlagt utskrift)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Likningen $T(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$ er dermed ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Her er $s = x_3$ og $t = x_4$ frie parametre. Løsningen kan skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-2t \\ -s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

en basis for Ker T. At Ker T = Nul A følger fordi

$$\text{Ker } T = \{\vec{x} \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul } A.$$

b) Fra $(*)$ følger at de to første søylevektorene i A utgjør en basis for Ran T. Altså er

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

en basis for Ran T. At Ran T = Col A følger fordi

$$\text{Ran } T = \{T(\vec{x}) \mid x \in \mathbb{R}^4\} = \{A\vec{x} \mid x \in \mathbb{R}^4\} = \text{Col } A.$$

c) Radreduksjon ved Matlab gir (se vedlagt utskrift)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Siste likning i det radreduserte likningssystemet sier her $0 = 1$.
Altså har likningssystemet

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ingen løsninger.

d) Radreduksjon ved Matlab gir (se vedlagt utskrift)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Likningssystemet

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er dermed ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 = \frac{1}{3} \\ \qquad x_2 + x_3 - x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

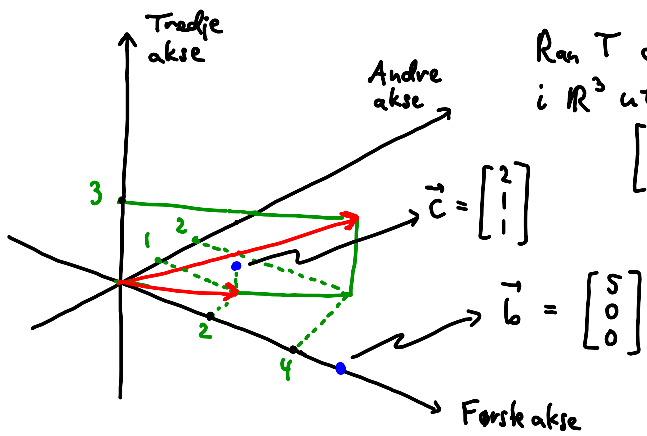
dvs.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} - x_3 - 2x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3} - x_3 + x_4 \end{cases}$$

Her er $s = x_3$ og $t = x_4$ frie parametre. Løsningen kan skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - s - 2t \\ \frac{1}{3} - s + t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Figur:



Ran T er underrommet (planet) i $\mathbb{R}^3$ utspent av vektorene $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (røde)

(Den ligger ikke i Col A, og dermed har $A\vec{x} = \vec{b}$ ingen løsninger)

Oppgave 3

Jeg er født 11. april, så jeg ønsker $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ slik at

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{cases} a + b = 11 & \text{I} \\ c + d = 11 & \text{II} \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} a + 2b = 4 & \text{III} \\ c + 2d = 8 & \text{IV} \end{cases}$$

III − I gir $b = -7$, så $a = 18$

IV − II gir $d = -3$, så $c = 14$

Altså: $A = \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 14 & -3 \end{bmatrix}$

Oppgave 4

a) $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ gir $(M^3 + 17M^2 - 5M + 13I)\vec{v} = M^3\vec{v} + 17M^2\vec{v} - 5M\vec{v} + 13\vec{v}$

Her er

$$M^3\vec{v} = M(M(M\vec{v})) = M(M(\lambda\vec{v})) = M(\lambda \cdot M\vec{v})$$
$$= M(\lambda \cdot \lambda\vec{v}) = \lambda^2 M\vec{v} = \lambda^2 \cdot \lambda\vec{v} = \lambda^3\vec{v}$$

Tilsvarende får vi $M^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$. Dette gir

$$(M^3 + 17M^2 - 5M + 13I)\vec{v} = \lambda^3\vec{v} + 17\lambda^2\vec{v} - 5\lambda\vec{v} + 13\vec{v}$$
$$= (\lambda^3 + 17\lambda^2 - 5\lambda + 13)\vec{v}$$

Altså er $\vec{v}$ en egenvektor for $M^3 + 17M^2 - 5M + 13I$ med egenverdi
$\lambda^3 + 17\lambda^2 - 5\lambda + 13$.

b) $\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

Så egenverdiene til A må oppfylle $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Løsning: $\lambda = 1$. Egenvektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} a + b = a \\ b = b \end{cases} \quad \text{Krav: } b = 0 \quad \text{Løsning: } \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \ (a \text{ fri})$$

Hvis en vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ skal kunne skrives $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, må $y = 0$.
Altså har ikke A noen egenbasis.

c) $$A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} - \begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}}}$$

Oppgave 5

a) Hvis A og B er reelle (2×2)-matriser og $r \in \mathbb{R}$, er også

$$A+B,\ rA \text{ og } -A$$

reelle (2×2)-matriser. Altså er A1, A2 og A4 oppfylt. Nullmatrisen

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

oppfyller kravet til en nullvektor i V. Aksiomene A5–A10 følger fra generelle regneregler for matriser.

b) Vi har

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = a\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + c\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

for alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Så $\mathcal{B}$ spenner ut V. At $\mathcal{B}$ også er en lineært uavhengig samling, følger fra likningen ovenfor: Hvis

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

må $a=b=c=d=0$. Siden basisen $\mathcal{B}$ har 4 vektorer, er $\underline{\underline{\dim V = 4}}$.

c) La $M_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. For alle $A,B \in V$ og $r\in\mathbb{R}$ får vi

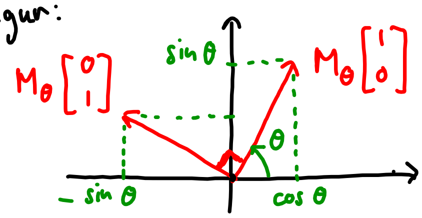
$$T(A+B) = M_\theta\cdot(A+B) = M_\theta A + M_\theta B = T(A)+T(B)$$
$$T(rA) = M_\theta\cdot(rA) = r\cdot(M_\theta A) = r\cdot T(A)$$

Her brukte vi regnereglene $M(N+P) = MN + MP$ og $M(aN) = a(MN)$ for matriser. Altså er T en lineærtransformasjon.

(Oppgave 5c forts.)

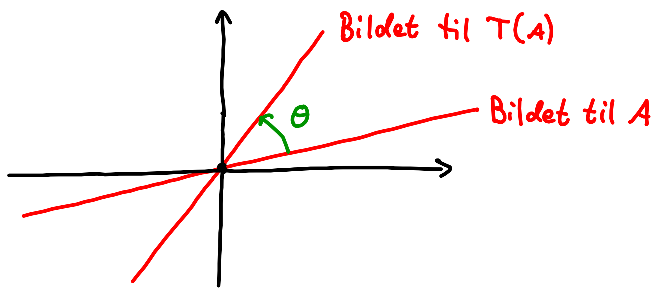
Vi har $M_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ og $M_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

Figur:



M_θ er altså en rotasjonsmatrise som roterer alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ vinkelen θ mot klokken.

Dette betyr at bildet til $T(A) = M_\theta \cdot A$ vil være bildet til A rotert vinkelen θ mot klokken. Hvis bildet til A er et 1-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^2$, altså en linje gjennom origo, vil bildet til matrisen $T(A)$ være denne linjen rotert med vinkelen θ. Figur:



Hvis bildet til A er 2-dimensjonalt (hele $\mathbb{R}^2$) eller 0-dimensjonalt (kun origo), blir bildet til $T(A)$ det samme som bildet til A.

d) La $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fra teorien vet vi da at

$$[T]_B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \;\; [T(\vec{b}_2)]_B \;\; [T(\vec{b}_3)]_B \;\; [T(\vec{b}_4)]_B \right]$$

Vi får

$$T(\vec{b}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\cos\theta)\vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + (\sin\theta)\vec{b}_3 + 0 \cdot \vec{b}_4$$

Så $[T(\vec{b}_1)]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

(Oppgave 5d forts.)

På tilsvarende måte får vi

$$T(\vec{b}_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} = 0\,\vec{b}_1 + (\cos\theta)\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3 + (\sin\theta)\vec{b}_4$$

Så $\left[T(\vec{b}_2)\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

$$T(\vec{b}_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = (-\sin\theta)\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + (\cos\theta)\vec{b}_3 + 0\vec{b}_4$$

Så $\left[T(\vec{b}_3)\right]_B = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{b}_4) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = 0\vec{b}_1 - (\sin\theta)\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3 + (\cos\theta)\vec{b}_4$$

Så $\left[T(\vec{b}_4)\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

Altså

$$\underline{\underline{[T]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}}$$