MAT1120 H23

Obligatorisk oppgavesett nr. 2 (av 2)

Innleveringsfrist: Torsdag 2. november 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Besvarelsen skal leveres som

én PDF-fil samt én kjørbar Python-fil (.py) eller Matlab-fil (.m)

Du velger selv om PDF-en skal bestå av scannede håndskrevne ark, eller om du skriver besvarelsen direkte inn på datamaskin med for eksempel TEX eller LaTeX. Eventuelle scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal innholde navn, emne og oblignummer. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser. For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1

La $\mathbf{P}_3$ være vektorrommet av polynomer p med grad høyst 3, og betrakt de fem punktene

$$(t_1, s_1) = (2, 7),\ (t_2, s_2) = (3, 3),\ (t_3, s_3) = (4, 5),\ (t_4, s_4) = (5, 4) \text{ og } (t_5, s_5) = (6, 3)$$

i planet $\mathbf{R}^2$.

a) Vis at kravet for at polynomet $p \in \mathbf{P}_3$ gitt ved

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

skal oppfylle $p(t_i) = s_i$ for $i = 1, \ldots, 5$ kan skrives $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Vis at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er selvmotsigende, gjerne ved hjelp av Python eller Matlab.

c) Begrunn at koeffisientene $c_0, \ldots, c_3$ til polynomet $p \in \mathbf{P}_3$ som løser approksimasjonsproblemet

$$A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$$

best, altså som minimaliserer summen

$$S = \sum_{i=1}^{5} (s_i - p(t_i))^2$$

av kvadratavvikene, kan finnes ved å løse systemet

$$(A^{\mathrm{T}} A)\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}, \tag{1}$$

med hensyn på $\mathbf{x}$, der $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er som under a). Begrunn også at (1) har en entydig løsning $\mathbf{x}$. (Merk: I oppgaver som dette kan du selvsagt alltid henvise til teoremer i pensum etter ønske.)

d) Finn polynomet $p \in \mathbf{P}_3$ som tilsvarer løsningen av (1), og bruk Python eller Matlab til å lage et plott som viser de fem punktene (t_i, s_i) sammen med grafen til $p(t)$ på intervallet $[1.9, 6.1]$.

e) Vi skal nå undersøke hva som skjer når vi øker graden til polynomet et hakk. Sett opp likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som uttrykker at polynomet $q \in \mathbf{P}_4$ gitt ved

$$q(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4$$

oppfyller $q(t_i) = s_i$ for $i = 1, \ldots, 5$, der vi nå har

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

og A er en (5×5)-matrise.

f) Finn polynomet $q \in \mathbf{P}_4$ som tilsvarer løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ fra punkt e), og bruk Python eller Matlab til å lage et plott som viser de fem punktene (t_i, s_i) sammen med grafen til $q(t)$ på intervallet $[1.9, 6.1]$.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

g) I resten av denne oppgaven skal vi se litt mer generelt på situasjonen fra punkt e). La $\mathbf{P}_n$ være vektorrommet av polynomer p med grad høyst n, og la $t_0, \ldots, t_n$ være $n+1$ ulike reelle tall. Definer avbildningen $T : \mathbf{P}_n \to \mathbf{R}^{n+1}$ ved

$$T(p) = (p(t_0), p(t_1), \ldots, p(t_n)) \qquad \text{for alle } p \in \mathbf{P}_n.$$

Vis at T er en lineærtransformasjon.

h) Vis at Ker $T = \{\mathbf{0}\}$. (Hint: Hvis $T(p) = \mathbf{0}$, er p et polynom med grad høyst n og minst $(n+1)$ nullpunkter. Er det mulig hvis ikke p er nullpolynomet?)

i) Vis at T er en isomorfi.

j) Vis at hvis $s_0, \ldots, s_n$ er $n+1$ vilkårlige reelle tall, så fins det et entydig polynom $p \in \mathbf{P}_n$ slik at p *interpolerer* de $(n+1)$ punktene (t_i, s_i) i planet, dvs. slik at vi har

$$p(t_i) = s_i \qquad \text{for } i = 0, \ldots, n.$$

Oppgave 2

La $L > 0$ være et reelt tall, og la V være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f : [-L, L] \to \mathbf{R}$ med de vanlige vektorromsoperasjonene for funksjonsrom. Vi definerer

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx$$

a) Vis at $\langle f, g \rangle$ er et indreprodukt på V.

I resten av oppgaven betrakter vi V som et indreproduktrom med indreproduktet fra punkt a).

b) La $n \geq 1$ være et heltall. Vis at

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}\ ,\ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}\ ,\ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = 1.$$

Hint: Substituer $u = \frac{n\pi x}{L}$ og bruk $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$ samt en vri.

c) La $n, m \geq 1$ være *ulike* heltall. Vis at

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}\ ,\ \sin \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}\ ,\ \cos \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = 0.$$

Hint: Du kan bruke $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$ på det ene indreproduktet. Prøv å finne et tilsvarende triks for det andre.

d) La $n, m \geq 1$ være et heltall, ikke nødvendigvis ulike. Vis at

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}\ ,\ \cos \frac{m\pi x}{L} \right\rangle = 0.$$

Hint: Her kan formler for $\sin(u+v)$ og $\sin(u-v)$ være aktuelle, jamfør hintet til c).

e) La $N \geq 1$ være et heltall. La $B \subseteq V$ være mengden bestående av den konstante funksjonen $f_0(t) = 1/\sqrt{2}$ samt alle funksjoner $f \in V$ på formen

$$f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{eller på formen} \quad f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{der } 1 \leq n \leq N.$$

La $U \subseteq V$ være underrommet utspent av B. Vis at B er en ortonormal basis for U.

f) Begrunn at projeksjonen $\mathrm{proj}_U f$ av en gitt funksjon $f \in V$ på underrommet U er den funksjonen i U som tilnærmer f best, i den forstand at

$$\int_{-L}^{L} (f(x) - \mathrm{proj}_U f(x))^2 dx < \int_{-L}^{L} (f(x) - g(x))^2 dx \quad \text{for alle } \; g \neq \mathrm{proj}_U f \; \text{ i underrommet } U.$$

g) Vis at hvis vi definerer

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

for $n = 1, \dots, N$, så har vi

$$\mathrm{proj}_U f = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

Uttrykket til høyre i (1) kalles *Fourier-tilnærmingen* av grad N til f på intervallet $[-L, L]$. I grensen $N \to \infty$ får vi det som kalles *Fourier-rekken* til f på intervallet.

h) Finn Fourier-tilnærmingene $\mathrm{proj}_U f$ av grad $N = 4$ og $N = 6$ til funksjonen $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ gitt ved

$$f(x) = x$$

på intervallet $[-1, 1]$. (Her er altså $L = 1$.) Bruk Python eller Matlab til å lage en figur som viser grafen til f og grafen til Fourier-tilnærmingen for $N = 4$ i et felles koordinatsystem, der grafen til uttrykket på høyre i (1) er tegnet for $x \in [-2, 2]$. Lag også en tilsvarende figur for grafen til f sammen med Fourier-tilnærmingen for $N = 6$.

Oppgave 3

Skriv et program i Python eller Matlab som estimerer sannsynligheten for at klokkekabalen går opp, jamfør beskjed med lenke til video på semestersiden. Programmet skal spørre brukeren hvor mange ganger kabalen skal legges, og returnere (a) antall ganger kabalen gikk opp, (b) antall ganger den ikke gikk opp og brøken a/(a+b). Hvilket anslag for sannsynligheten får du ved å bruke programmet ditt? Lever programmet som en kjørbar kodefil (.m eller .py). Det er ikke nødvendig å legge ved kjøreeksempler.

SLUTT