# Løsningsforslag oblig 2 MAT 1120 høst 2023

## Oppgave 1

a) $p(2)=7$ gir $c_0+2c_1+4c_2+8c_3=7$
$p(3)=3$ gir $c_0+3c_1+9c_2+27c_3=3$
$p(4)=5$ gir $c_0+4c_1+16c_2+64c_3=5$
$p(5)=4$ gir $c_0+5c_1+25c_2+125c_3=4$
$p(6)=3$ gir $c_0+6c_1+36c_2+216c_3=3$

På matriseform blir dette

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Altså $A\vec{x}=\vec{b}$ med $A$, $\vec{x}$ og $\vec{b}$ definert som i oppgaveteksten.

b) Matlab/Python gir ved radreduksjon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 5 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 4 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Oversatt til likningssystem sier siste likning $0=1$.
Altså er systemet $A\vec{x}=\vec{b}$ selvmotsigende.

c) Fra pensum (KOLA teorem 13.7.1, Lay teorem 6.5.13) vet vi at likningssystemet

$$(A^TA)\vec{x} = A^T\vec{b}$$

har en entydig løsning $\vec{x}$ slik at

$$\|A\vec{x}-\vec{b}\| < \|A\vec{y}-\vec{b}\| \quad \text{for alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ slik at } \vec{y} \neq \vec{x}.$$

Entydigheten følger fordi søylene i $A$ er lineært uavhengige, noe vi ser fra radreduksjonen i b).

(Oppgave 1c) forts.)

Hvis vi setter

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

og lar $p$ og $q$ være polynomene med koeffisienter fra $\vec{x}$ og $\vec{y}$ henholdsvis, betyr dette at

$$\left\| \begin{bmatrix} c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3 \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 \\ c_0 + 5c_1 + 25c_2 + 125c_3 \\ c_0 + 6c_1 + 36c_2 + 216c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| < \left\| \begin{bmatrix} y_0 + 2y_0 + 4y_0 + 8y_0 \\ y_0 + 3y_0 + 9y_0 + 27y_0 \\ y_0 + 4y_0 + 16y_0 + 64y_0 \\ y_0 + 5y_0 + 25y_0 + 125y_0 \\ y_0 + 6y_0 + 36y_0 + 216y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|$$

dvs.

$$\left\| \begin{bmatrix} p(t_1) \\ p(t_2) \\ p(t_3) \\ p(t_4) \\ p(t_5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} \right\| < \left\| \begin{bmatrix} q(t_1) \\ q(t_2) \\ q(t_3) \\ q(t_4) \\ q(t_5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} \right\|$$

Altså

$$\sum_{i=1}^{5} \left( p(t_i) - s_i \right)^2 < \sum_{i=1}^{5} \left( q(t_i) - s_i \right)^2$$

Dette betyr at polynomet $p$ minimaliserer summen $S$.

d) Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \underset{\boxed{\text{Matlab/Python}}}{=} \begin{bmatrix} 5 & 20 & 90 & 440 \\ 20 & 90 & 440 & 2274 \\ 90 & 440 & 2274 & 12200 \\ 440 & 2274 & 12200 & 67170 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 81 \\ 343 \\ 1605 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 1d, forts.)

Radreduksjon på systemet $(A^TA)\vec{x} = A^T\vec{b}$ gir nå (Python/Matlab)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 20 & 90 & 440 & 22 \\ 20 & 90 & 440 & 2274 & 81 \\ 90 & 440 & 2274 & 12200 & 343 \\ 440 & 2274 & 12200 & 67170 & 1605 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 177/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -173/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 87/14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Så polynomet som tilsvarer løsningen av $(A^TA)\vec{x} = A^T\vec{b}$ er

$$p(t) = \frac{177}{5} - \frac{173}{7}t + \frac{87}{14}t^2 - \frac{1}{2}t^3$$

Plott: Vedlegg

e) Polynomet $q \in \mathbb{P}_4$ gitt ved

$$q(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4$$

oppfyller $p(t_i) = s_i$ for $i = 1, \ldots, 5$ hvis og bare hvis

$$\begin{cases} d_0 + 2d_1 + 4d_2 + 8d_3 + 16d_4 = 7 \\ d_0 + 3d_1 + 9d_2 + 27d_3 + 81d_4 = 3 \\ d_0 + 4d_1 + 16d_2 + 64d_3 + 256d_4 = 5 \\ d_0 + 5d_1 + 25d_2 + 125d_3 + 625d_4 = 4 \\ d_0 + 6d_1 + 36d_2 + 216d_3 + 1296d_4 = 3 \end{cases}$$

Dette er ekvivalent med $A\vec{x} = \vec{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

f) Radreduksjon på systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ fra e) ved Python/Matlab gir løsningen

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129 \\ -135 \\ 52 \\ 17/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende polynomet blir da

$$q(t) = 129 - 135t + 52t^2 - \frac{17}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4$$

Plott: Vedlegg

g) Vi sjekker aksiomene L1 og L2 for lineærtransformasjoner. De holder:

L1: $T(p+q) = ((p+q)(t_0), \dots, (p+q)(t_n)) = (p(t_0)+q(t_0), \dots, p(t_n)+q(t_n))$

$= (p(t_0), \dots, p(t_n)) + (q(t_0), \dots, q(t_n)) = T(p) + T(q)$

L2: $T(rp) = ((rp)(t_0), \dots, (rp)(t_n)) = (r \cdot p(t_0), \dots, r \cdot p(t_n))$

$= r \cdot (p(t_0), \dots, p(t_n)) = r \cdot T(p)$ for alle $r \in \mathbb{R}$.

h) Hvis $T(p) = \vec{0}$, må $p(t_0) = \dots = p(t_n) = 0$.
Altså er $p$ et polynom med grad høyst $n$ og $n+1$ ulike nullpunkter.
Ved algebraens fundamentalteorem (KOLA teorem 4.6.1) er dette umulig hvis ikke $p$ er nullpolynomet $\vec{0}$, altså $p = 0$. Så $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$.

i) Siden $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$, vet vi fra pensum (KOLA teorem 12.3.7, f.eks.) at $T$ er injektiv. Fra rangteoremet følger at bildet til $T$ har dimensjon $n+1$ så $T$ er surjektiv på $\mathbb{R}^{n+1}$. Altså er $T$ en isomorfi.

j) At $p \in \mathbb{P}_n$ oppfyller $p(t_i) = s_i$ for $i = 0, \dots, n$ er ekvivalent med at

$$T(p) = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Siden $T$ er surjektiv, finnes det et polynom $p \in \mathbb{P}_n$ slik at $T$ avbilder $p$ på

$$(s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Fordi $T$ også er injektiv, er dette polynomet $p \in \mathbb{P}_n$ entydig.

## Oppgave 2

a) Vi sjekker aksiomene I1 - I4 for indreprodukt:

I1: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) g(x)\,dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} g(x) f(x)\,dx = \langle g, f \rangle$

I2: $\langle f, g+h \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot [g(x) + h(x)]\,dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x) g(x) + f(x) h(x)]\,dx$

$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot g(x)\,dx + \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot h(x)\,dx$$

$$= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

I3: $\langle f, rg \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot (rg)(x)\,dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot r \cdot g(x)\,dx$

$$= r \cdot \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot g(x)\,dx = r \cdot \langle f, g \rangle \quad \text{for } r \in \mathbb{R}$$

I4: Vi har

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2\,dx \geq 0$$

for alle $f \in V$, fordi $f$ er kontinuerlig. Videre: Hvis det fins et tall $x_0 \in [-L, L]$ slik at $f(x_0) \neq 0$, fins det et tall $c > 0$ slik at

$$[f(x_0)]^2 > c$$

Ved kontinuitet av $f^2$ fins det da $\varepsilon > 0$ slik at $[f(x)]^2 \geq \frac{c}{2}$ for alle $x \in [-L, L]$ slik at $|x - x_0| < \varepsilon$. Det følger at

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2\,dx = \langle f, f \rangle > 0$$

Altså er $\langle f, f \rangle = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$ (nullfunksjonen).

b) Vi har

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2} dx - \frac{1}{L}\left[\frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{L}\cdot L - \frac{1}{2n\pi}\left[\sin 2n\pi - \sin(-2n\pi)\right] = 1 - \frac{1}{2n\pi}[0-0] = \underline{\underline{1}}$$

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left[1 - \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 1\, dx - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{L}\cdot 2L - 1 = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

((*) ved forrige regning)

c) Vi har

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m x\pi}{L}\, dx$$

hint

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{L} - \cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2L}\cdot 2\cdot\int_{0}^{L}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{L} - \cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] dx$$

(fordi integranden er en jevn funksjon)

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{(n+m)\pi}\left[\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]_0^L - \frac{L}{(n-m)\pi}\left[\sin\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]_0^L\right]$$

$$= \frac{1}{(n+m)\pi}\cdot\sin(n+m)\pi - \frac{1}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

fordi $\sin(k\pi) = 0$ for alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{m x\pi}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m x\pi}{L}\, dx$$

$\sin u \cos v = \cos u \cos v - \cos(u+v)$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\, dx$$

I sted

$$= 0 - \frac{1}{L}\left[\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = -\frac{1}{n\pi}\left[\sin(n+m)\pi + \sin(n+m)\pi\right] = \underline{\underline{0}}$$

d) Hvis $n$ og $m$ er naturlige tall, har vi

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L} \right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin u\cos v\\ =\frac{1}{2}\left[\sin(u+v)-\sin(u-v)\right]\end{array}} \quad = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\sin\frac{(n+m)\pi x}{L} - \sin\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2L}\cdot(0-0)$$ (fordi begge ledd vi integrerer, er odde funksjoner)

e) Dette følger fra b) – d), gitt at vi kan vise $\langle f_0, f_0\rangle = 1$ og

$$\left\langle f_0, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \left\langle f_0, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$$

Vi får

$$\langle f_0, f_0\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\,dx = 1$$

$$\left\langle f_0, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= 0$$ (fordi integranden er en odde funksjon)

$$\left\langle f_0, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\left[\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,n\pi}\left[\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\right]$$

$$= 0$$ (fordi $\sin(k\pi) = 0$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.)

Altså er $B$ en ortonormal basis for underrommet $\mathcal{U}$.

f) Fra pensum (KOLA teorem 13.3.2, Lay teorem 6.3.9) vet vi at

$$\|\text{proj}_{\mathcal{U}} f - f\| < \|g - f\| \quad \text{for alle } g \neq f \text{ i } \mathcal{U}.$$

Altså

$$\|\text{proj}_{\mathcal{U}} f - f\|^2 < \|g - f\|^2 \quad \text{for alle } g \neq f \text{ i } \mathcal{U} \qquad (*)$$

Her er

$$\|\text{proj}_{\mathcal{U}} f - f\|^2 = \langle \text{proj}_{\mathcal{U}} - f, \text{proj}_{\mathcal{U}} - f \rangle$$
$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left[(\text{proj}_{\mathcal{U}} f)(x) - f(x)\right]^2 dx$$

$$\|g - f\|^2 = \langle g - f, g - f \rangle$$
$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left[g(x) - f(x)\right]^2 dx$$

Innsetting i (*) gir at vi for alle $g \neq f$ i underrommet $\mathcal{U}$ har

$$\int_{-L}^{L} \left[f(x) - \text{proj}_{\mathcal{U}} f(x)\right]^2 dx < \int_{-L}^{L} \left[f(x) - g(x)\right] dx.$$

g) Siden $\mathcal{B}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{U}$, vet vi at

$$\text{proj}_{\mathcal{U}} f = \langle f_0, f \rangle f_0 + \sum_{n=1}^{N} \langle \cos\frac{n\pi x}{L}, f \rangle \cos\frac{n\pi x}{L}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \langle \sin\frac{n\pi x}{L}, f \rangle \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Her er

$$\langle f_0, f \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\, L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

så $\langle f_0, f \rangle f_0 = \langle f_0, f \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2L} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = a_0$

( Oppgave 2g) forts. )

Videre har vi for alle $n = 1, \dots, N$

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cdot f(x)\,dx = a_n$$

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, f \right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cdot f(x)\,dx = b_n$$

Innsetting i (*) gir

$$\underline{\underline{\mathrm{proj}_u f = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}}}$$

h) Med $f(x) = x$ og $L = 1$ får vi

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\cos(n\pi x)\,dx = 0 \qquad \text{(integranden er odde)}$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)\,dx \qquad \text{(integranden er jevn)}$$

$$= 2\cdot\left\{\left[-\frac{1}{n\pi}x\cdot\cos(n\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{1}{n\pi}\right)\cos(n\pi x)\,dx\right\}$$

Delvis integrasjon : $F(x) = x$ $\quad G'(x) = \sin(n\pi x)$

$F'(x) = 1$ $\quad G(x) = \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)$

$$= 2\cdot\left\{\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) - 0\right] + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1\right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\sin(n\pi) - 0\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[0 - 0\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(Oppgave 2h) forts.)

Innsatt gir dette:

$N=4$ $\quad \mathrm{proj}_{u} f = \sum_{n=1}^{4} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\pi x)$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(4\pi x)\right]$$

$N=6$ $\quad \mathrm{proj}_{u} f = \sum_{n=1}^{6} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\pi x)$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(4\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) - \frac{1}{6}\sin(6\pi x)\right]$$

Plottene: Se vedlegg

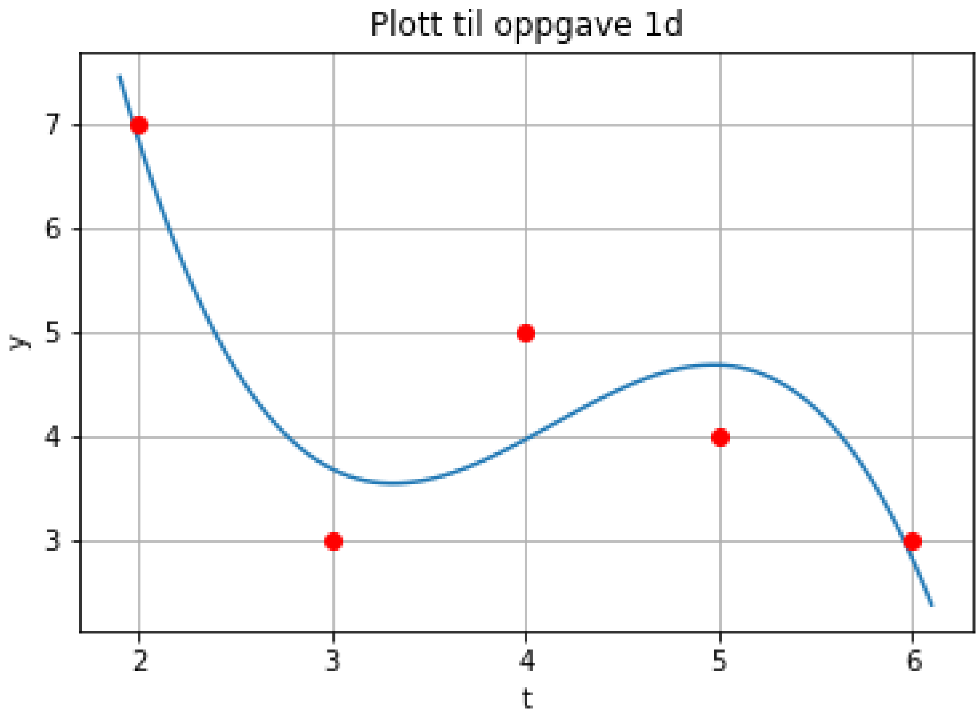
## Oppgave 3

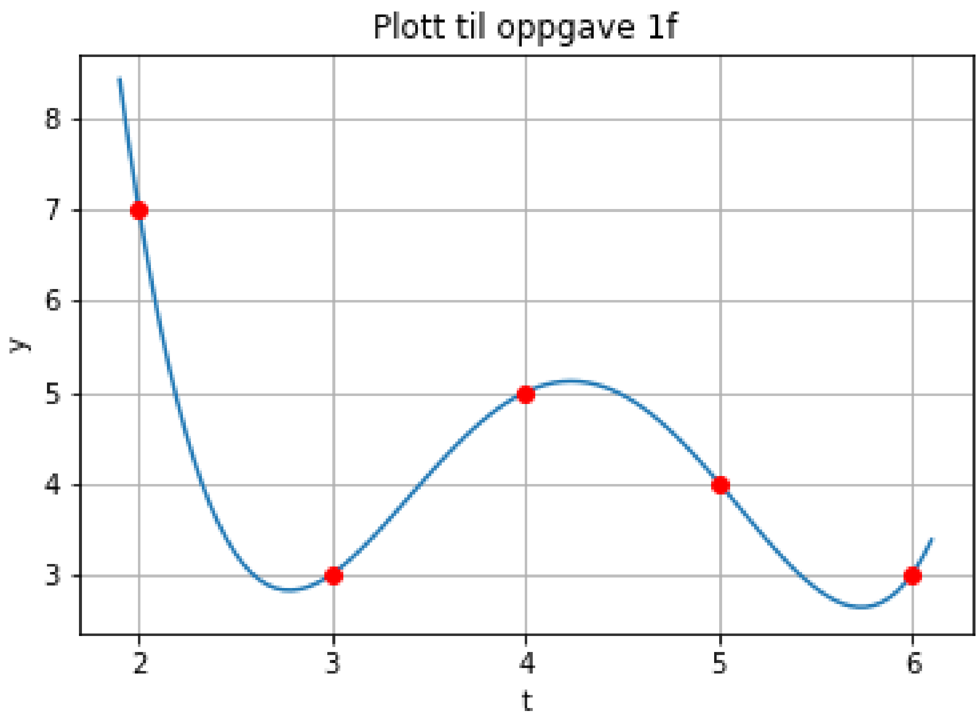
To Python-program som simulerer klokkekabalen er vist i vedlegget. Kjøringer indikerer at sannsynligheten for at kabalen går opp, er i nærheten av 0.117, altså 11.7 %

# Vedlegg

## Plott til oppgave 1d og 1f

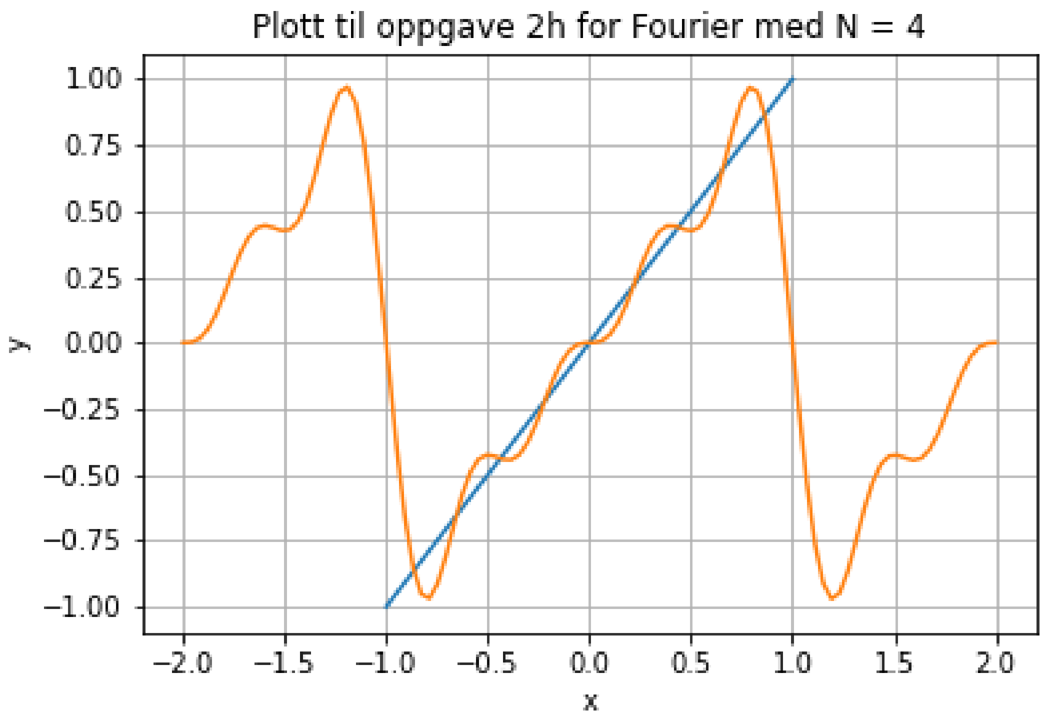
De røde prikkene er punktene $(s_i, t_i)$ for $i = 1, \ldots, 5$. Den blå kurven er grafen til henholdsvis polynomet $p$ fra punkt d) og polynomet $q$ fra punkt f).

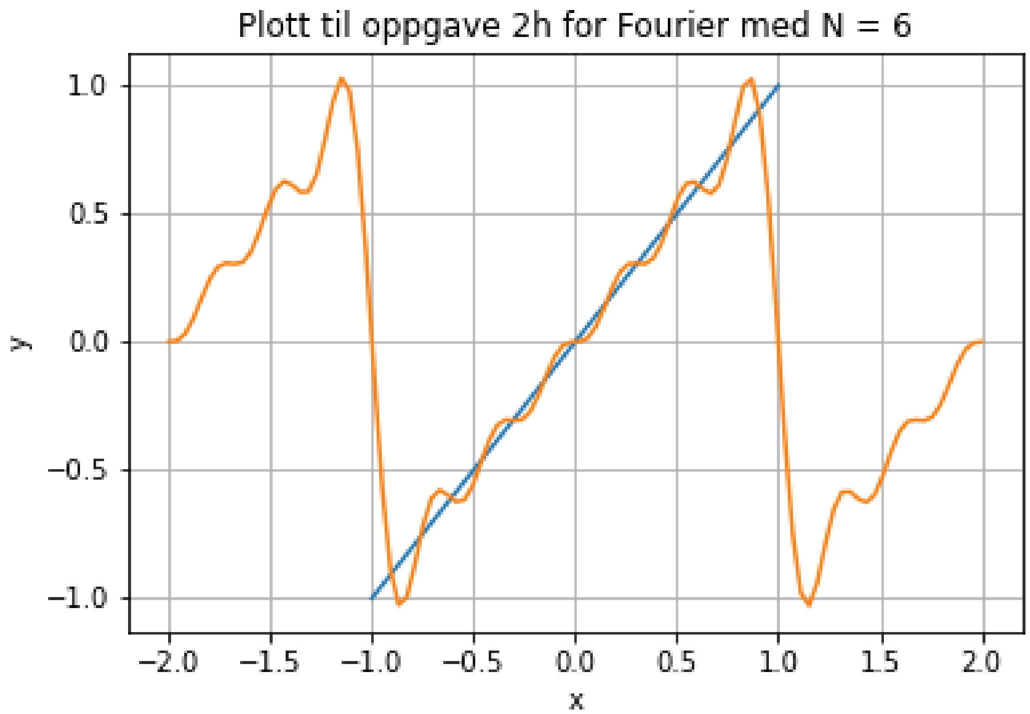


# Plott til oppgave 2h

Den blå linjen er grafen til $f(x) = x$ på intervallet $[-1,1]$.
Den oransje grafen er Fouriertilnærmingen til $f$ med henholdsvis N = 4 og N = 6.



Løsning til oppgave 3

Oppgaven dreide seg om å skrive et program som simulerer klokkekabalen. Et korrekt program skal gi sannsynlighet ca 11.7 % for at kabalen går opp.
Her kommer to ulike løsninger i Python. Det første programmet er ganske enkelt og primitivt når det gjelder bruk av virkemidler. Her brukes ingen liste av lister, i stedet legges alle de 13 mulighetene inn i while-løkken etter hverandre. Resultatet er lang kode med en relativt enkel logisk struktur. Det andre programmet (skrevet av gruppelærer Torger Olson) er mer avansert, men til gjengjeld mye kortere, mer elegant og mer effektivt.

**Løsning 1:**

```
import numpy as np

n = int(input('Skriv antall ganger kabalen skal legges: '))

j = 0    # antall ganger kabalen er lagt, settes lik 0 ved starten
opp = 0  # antall ganger kabalen har gått opp, settes lik 0 i starten

while j < n:   # while-løkken legger kabalen

    x = np.random.permutation(52) + 1  # x er en permutasjon av tallene 1-52
    h = list(x)   # Listen h er kortene på hånden, indeksert h[0], h[1],...
                  # Vi oppfatter kort 1-4 som enerne, kort 5-8 som toere, osv.
                  # Knekt (J) er elvere, altså kort nummer 41-44
                  # Dame (Q) er tolvere, altså kort nummer 45-48
                  # Konge (K) er midten av klokken. Dette er kort nummer 49-52

    b1 = list() # kortbunkene rundt klokken på bordet, i starten tomme
    b2 = list()
    b3 = list()
    b4 = list()
    b5 = list()
    b6 = list()
    b7 = list()
    b8 = list()
    b9 = list()
    b10 = list()
    b11 = list()
    b12 = list()
    b13 = list()

    s = np.ones([13])  # s[i] er først 1, settes lik 0 hvis klokkeslett i+1 treffes

    while len(h)>0 and sum(s) > 0:

        if s[0]>0:          # Legger kun kort på klokkeslett som ikke er truffet
            if h[0] < 5:    # Sjekker match med kort som legges ut
                s[0]=0      # Markerer treff hvis match med utlagt kort
                h = h + b1  # Tar inn bunken på hånden
            else:
               b1.extend([h[0]])  # Hvis det ikke er treff, legges kortet på bunken
            del h[0]              # Kortet fjernes fra bunken på hånden
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0: # Hvis ingen kort igjen på hånden, eller
            break                      # alle klokkeslett truffet: Gå ut av løkken

        if s[1]>0:
            if h[0] < 9 and h[0] > 4:
                s[1]=0
                h = h + b2
            else:
                b2.extend([h[0]])
```

```
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[2]>0:
    if h[0] < 13 and h[0] > 8:
        s[2]=0
        h = h + b3
    else:
        b3.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[3]>0:
    if h[0] < 17 and h[0] > 12:
        s[3]=0
        h = h + b4
    else:
        b4.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[4]>0:
    if h[0] < 21 and h[0] > 16:
        s[4]=0
        h = h + b5
    else:
        b5.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[5]>0:
    if h[0] < 25 and h[0] > 20:
        s[5]=0
        h = h + b6
    else:
        b6.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[6]>0:
    if h[0] < 29 and h[0] > 24:
        s[6]=0
        h = h + b7
    else:
        b7.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[7]>0:
    if h[0] < 33 and h[0] > 28:
        s[7]=0
        h = h + b8
    else:
        b8.extend([h[0]])
    del h[0]
if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
    break

if s[8]>0:
    if h[0] < 37 and h[0] > 32:
        s[8]=0
        h = h + b9
```

```
            else:
                b9.extend([h[0]])
            del h[0]
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
            break

        if s[9]>0:
            if h[0] < 41 and h[0] > 36:
                s[9]=0
                h = h + b10
            else:
                b10.extend([h[0]])
            del h[0]
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
            break

        if s[10]>0:
            if h[0] < 45 and h[0] > 40:
                s[10]=0
                h = h + b11
            else:
                b11.extend([h[0]])
            del h[0]
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
            break

        if s[11]>0:
            if h[0] < 49 and h[0] > 44:
                s[11]=0
                h = h + b12
            else:
                b12.extend([h[0]])
            del h[0]
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
            break

        if s[12]>0:
            if h[0] < 53 and h[0] > 48:
                s[12]=0
                h = h + b13
            else:
                b13.extend([h[0]])
            del h[0]
        if len(h) == 0 or sum(s) == 0:
            break

    if sum(s) == 0:
        opp = opp + 1

    j=j+1

print('Antall ganger kabalen gikk opp: ', opp)
print('Antall ganger kabalen ikke gikk opp: ', n-opp)
print('Estimert sannsynlighet for at kabalen går opp: ', opp/n)
```

**Løsning 2:**

```
import random

def KlokkeKabal(deck) :
    clock = [[] for n in range(1,14)] # list of piles in the clock
    open_positions = [n for n in range(0,13)] # positions we don't skip
    pos_index = 0
    while len(deck) > 0 :
        pos = open_positions[pos_index] # where to place next card
        card = deck.pop(0) # draw the next card, first card with deck facing down
        if card == pos :
            deck.extend(clock[pos]) # add cards in clock[pos] to end of deck
            clock[pos] = [card] # replace with the drawn card
            open_positions.remove(pos)
            if len(open_positions) == 0 : # check if we won
                break
            pos_index = pos_index % len(open_positions)
        else :
            clock[pos].append(card) # place card
            pos_index = (pos_index + 1) % len(open_positions) # go to next position

    # print([p[0] if p else None for p in clock]) # print top card of each pile in the clock after the game
    return len(open_positions)

n = int(input('Skriv antall ganger kabalen skal legges: '))
a = 0 # number of successes
for g in range(0,n) :
    deck = [n for n in range(0,13) for i in range(0,4)] # [0,0,0,0,1,1,1,1,...,12,12,12,12]
    random.shuffle(deck) # shuffle the deck
    if KlokkeKabal(deck) == 0 : # all positions closed -> success
        a += 1

print('Antall ganger kabalen gikk opp: ', a)
print('Antall ganger kabalen ikke gikk opp: ', n-a)
print('Estimert sannsynlighet for at kabalen går opp: ', a/n)
```