Prøveeksamen MAT 1120 lørdag 18.11.23

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Vi har $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matlab

Her har første og tredje søyle i den reduserte trappeformen til A pivotelementer, så de tilsvarende søylevektorene i A er en basis for bildet Col A til A. Altså er

$$\{(-2,1,-5,-1),\ (2,-4,0,2)\}$$

en basis for Col A. Nul A er løsningsrommet til likningen $A\vec{x} = \vec{0}$, og fra den reduserte trappeformen ser vi at denne er ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Her blir $x_2 = t$ og $x_4 = s$ frie parametre, og løsningen er

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = t \\ x_3 = \frac{1}{2}s \\ x_4 = s \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{(3,1,0,0),\ (0,0,\tfrac{1}{2},1)\}$$

en basis for Nul A.

(Oppgave 1 forts.)

b) Her kan vi bruke Gram-Schmidt på basisen $\mathcal{B}$.
Det blir relativt enkelt, fordi $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ allerede er ortogonale.
Vi får

$$\vec{m}_1 = \vec{b}_1 = (3,1,0,0)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{m}_1\|}\cdot\vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1,0,0)$$

$$\vec{m}_2 = \vec{b}_2 - \langle\vec{q}_1,\vec{b}_2\rangle\vec{q}_1 = \vec{b}_2 - 0\cdot\vec{q}_1 = \left(0,0,\tfrac{1}{2},1\right)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{m}_2\|}\cdot\vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}\cdot\vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\cdot\vec{m}_2$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\vec{m}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(0,0,\tfrac{1}{2},1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,2)$$

Så $\underline{\underline{\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,2)\right\}}}$ er en ortonormal basis for Nul A.

Oppgave 2

a) Vi har

$$T(p+q) = (p+q)(1) + (p+q)(0)\cdot t$$

$$= p(1) + q(1) + \big(p(0)+q(0)\big)\cdot t$$

$$= \big[p(1)+p(0)\cdot t\big] + \big[q(1)+q(0)\cdot t\big]$$

$$= T(p) + T(q) \qquad \text{for alle } p,q\in V$$

$$T(rp) = (rp)(1) + (rp)(0)\cdot t$$

$$= r\cdot p(1) + r\cdot p(0)\cdot t$$

$$= r\big[p(1)+p(0)\cdot t\big] = r\,T(p) \qquad \text{for alle } r\in\mathbb{R} \text{ og } p\in V.$$

Altså er T en lineærtransformasjon.

Vi har $S(1+t) = (1+t)+t = 1+2t$

$$S(1)+S(t) = (1+t)+(t+t) = 1+3t \neq S(1+t)$$

så S er ikke en lineærtransformasjon.

(Oppgave 2 forts.)

b) La $\vec{b}_1 = 1$ og $\vec{b}_2 = t$, med $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$
Vi har ($\vec{b}_1(t) = 1$ og $\vec{b}_2(t) = t$)

$$T(\vec{b}_1) = T(1) = 1 + 1\cdot t = 1\cdot\vec{b}_1 + 1\cdot\vec{b}_2$$
$$T(\vec{b}_2) = T(t) = 1 + 0\cdot t = 1\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2$$

Så
$$[T]_B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \; [T(\vec{b}_2)]_B \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

c) La $B' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\} = \{1+t, 1-t\}$

Vi vet fra b) at vektorrommet V har dimensjon 2. Siden B' består av to vektorer, holder det derfor å vise at disse er lineært uavhengige. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ er slik at

$$a(1+t) + b(1-t) = 0, \quad (\text{for alle } t)$$

får vi
$$a + at + b - bt = 0$$
$$(a+b) + (a-b)t = 0$$

For at dette skal stemme, må $a+b=0$ og $a-b=0$. Den siste av disse gir $a=b$, og den første gir da $a=b=0$.
Altså er $\vec{b}_1'$ og $\vec{b}_2'$ lineært uavhengige, så B' er en basis.
For å finne $[T]_{B'}$, velger jeg å først finne overgangsmatrisen

$[id]_{B\leftarrow B'}$ (den trengs til d) uansett)

Vi har
$$[id]_{B\leftarrow B'} = \left[[\vec{b}_1']_B \; [\vec{b}_2']_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dermed også
$$[id]_{B'\leftarrow B} = \left([id]_{B\leftarrow B'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \qquad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(oppgave 2 forts.)

Nå får vi

$$[T]_{B'} = [id]_{B' \leftarrow B} \cdot [T]_B \cdot [id]_{B \leftarrow B'}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d) Fra c) har vi

$$P = [id]_{B' \leftarrow B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [id]_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a) Kongens likningssystem er

$$\begin{cases} 5B + 8L = 200 & \text{I} \\ 2B + L = \frac{1029}{2} & \text{II} \\ B + 6L = \frac{1696}{5} & \text{III} \end{cases}$$

I − 2·II − III gir $0 = 200 - 1029 - \frac{1696}{5}$

som ikke er sant. Likningssystemet er altså selvmotsigende, dvs. det har ingen løsninger. Dette kan forklare Skrues manglende suksess.

(Oppgave 3 forts.)

b) Vi har

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} & & & 5 & 8 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 1 & 6 \\ \hline 5 & 2 & 1 & 30 & 48 \\ 8 & 1 & 6 & 48 & 101 \end{array} = \begin{bmatrix} 30 & 48 \\ 48 & 101 \end{bmatrix}$$

Videre

$$A^T \begin{bmatrix} 200 \\ \frac{1029}{2} \\ \frac{1696}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ \frac{1029}{2} \\ \frac{1696}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11841}{5} \\ \frac{41497}{5} \end{bmatrix}$$

Ole, Dole og Doffens likninger kan skrives

$$\begin{bmatrix} 30 & 48 \\ 48 & 101 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11841}{5} \\ \frac{41497}{5} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Altså

$$A^TA \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} 200 \\ \frac{1029}{2} \\ \frac{1696}{5} \end{bmatrix}$$

Dette er normallikningen til kongens likningssystem $A \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ \frac{1029}{2} \\ \frac{1696}{5} \end{bmatrix}$

Altså har Ole, Dole og Doffen funnet likningene som gir minste kvadraters løsninger (beste tilnærmede løsning) til kongens uløselige likningssystem.

Fra Matlab-utskriften ser vi at (*) har den entydige løsningen

$$B = \frac{551}{10} = 55{,}1 \qquad L = \frac{149}{10} = 14{,}9$$

(Oppgave 3 forts.)

c) Det nye likningssystemet:
$$\begin{cases} 5B + 8L = 200 \\ 4B + 2L = 1029 \\ 5B + 30L = 1696 \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 5 & 30 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} & & & 5 & 8 \\ & & & 4 & 2 \\ & & & 5 & 30 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 66 & 198 \\ 8 & 2 & 30 & 198 & 968 \end{array} = \begin{bmatrix} 66 & 198 \\ 198 & 968 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 1029 \\ 1696 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13596 \\ 54538 \end{bmatrix}$$ (se Matlab-utskrift)

Så normallikningen for det nye likningssystemet er

$$\begin{bmatrix} 66 & 198 \\ 198 & 968 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\,596 \\ 54\,538 \end{bmatrix}$$

Fra Matlab-utskriften får vi at løsningen her er

$$B = \frac{1627}{17} \qquad L = \frac{625}{17}$$

Breddegraden B er større enn 90, så den er umulig.

Forklaring: Å multiplisere en likning med et tall $\neq 0$, svarer til en omvekting av kvadratavvikene, se vektet minste kvadraters metode.

(KOLA s. 661, Lay s. 431) Se også bakerst!

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \end{bmatrix} \qquad t \in (0,1)$$

Vi har:

$$A^T A = \begin{array}{cc|ccc} & & 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ & & 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \\ \hline 3t & 3\sqrt{1-t^2} & 9t^2 + 9(1-t^2) & 0 & 6t\sqrt{1-t^2} - 6t\sqrt{1-t^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{1-t^2} & -2t & 6t\sqrt{1-t^2} - 6t\sqrt{1-t^2} & 0 & 4(1-t^2) + 4t^2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi ser at egenverdiene til A^TA er $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$.

Singulærverdiene er altså $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2$$

En ortonormal egenbasis for A^TA tilsvarende egenverdiene λ_1, λ_2 og λ_3 består av vektorene

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Altså $V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Vi finner så

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3t \\ 3\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{1-t^2} \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ -t \end{bmatrix}$$

(Oppgave 4 forts.)

Altså
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

og
$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} & -t \end{bmatrix}$$

Vi har nå

$$A = \mathcal{U} \Sigma V^T$$
$$= \begin{bmatrix} t & \sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilleggsforklaring til Doffens paradoks (oppgave 3c)

Under b) ble verdiene av B og L funnet ved å minimalisere kvadratsummen

$$\left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[(2B+L)-\frac{1029}{2}\right]^2 + \left[(B+6L)-\frac{1696}{5}\right]^2$$

De nye verdiene av B og L blir funnet ved å minimalisere

$$\left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[(4B+2L)-1029\right]^2 + \left[(5B+30L)-1696\right]^2$$
$$= \left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[2\left((2B+L)-\frac{1029}{2}\right)\right]^2 + \left[5\left((B+6L)-\frac{1696}{5}\right)\right]^2$$
$$= \left[(5B+8L)-200\right]^2 + 4\cdot\left[(2B+L)-\frac{1029}{2}\right]^2 + 25\cdot\left[(B+6L)-\frac{1696}{5}\right]^2$$

Som vi ser, svarer dette til at kvadratavvikene på andre og tredje komponent har blitt vektet med henholdsvis 4 og 25. Da vil minimaliseringen legge mer vekt på å få disse små, så de optimale verdiene B, L vil endres. Endringen svarer til multiplikasjon med en diagonal vektmatrise W med diagonalelementer $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ og $w_3 = 5$.