UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra.
Eksamensdag:	Torsdag 8. desember 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Beregn $\det(M)$ og begrunn at M ikke er invertibel.

b) Bestem en vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ som er slik at $\text{Nul}\, M = \text{Span}\{\vec{x}_0\}$.

c) Sjekk at $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for M. Begrunn at M er diagonaliserbar.

d) La $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^3$. Sett $\vec{y}_{n+1} = M\vec{y}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Begrunn at $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n}\vec{y}_n$ eksisterer.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og sett $W = \operatorname{Col} A$.

Vi betrakter $\mathbb{R}^4$ ustyrt med sitt vanlig indreprodukt (prikkproduktet). Det kan taes for gitt at den reduserte trappeformen til A er matrisen R.

a) Angi rang A og en basis $\mathcal{B}$ for W som består av kolonnevektorer til A.

b) Angi en lineær avhengighetsrelasjon mellom kolonnevektorene til A.

Angi deretter $[\vec{b}_1]_{\mathcal{B}}$ og $[\vec{b}_2]_{\mathcal{B}}$ når $\vec{b}_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) La $\vec{a}_1$ og $\vec{a}_2$ betegne henholdsvis første og annen kolonnevektor til A. Sjekk at $\vec{a}_1$ og $\vec{a}_2$ er ortogonale. Bestem deretter en ortogonal basis for W som inneholder $\vec{a}_1$ og $\vec{a}_2$.

d) La $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Begrunn at den ortogonale projeksjonen av $\vec{y}$ på W er vektoren $\operatorname{proj}_W(\vec{y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og beregn avstanden fra $\vec{y}$ til W.

La nå $\mathcal{P}_2$ være vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad opptil 2 i en reell variabel. La $\mathcal{S}$ være standard basisen for $\mathcal{P}_2$. Definer avbildningen $T : \mathcal{P}_2 \to W$ ved $T(p) = A \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p(1) \\ p'(1) \end{bmatrix}$ når $p \in \mathcal{P}_2$ og p' betegner den deriverte av p.

e) Sjekk at T er lineær.

f) Bestem matrisen til T m.h.p. basisene $\mathcal{S}$ og $\mathcal{B}$. Er T en isomorfi?

SLUTT