UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra.
Eksamensdag:	Mandag 10. desember 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Matlab-utskrift (1 side).
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. *Merk : Til denne oppgaven er det vedlagt noen Matlab-kjøringer som du anbefales å benytte deg av.*

a) La $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestem rang M og dim Nul M.

Betrakt nå vektorrommet $\mathbb{P}_3$ som består av alle polynomer av grad høyst 3 i en reell variabel x.
La $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ der

$$\mathbf{q}_1(x) = x + x^2 + x^3,\ \mathbf{q}_2(x) = 1 + x,\ \mathbf{q}_3(x) = 1 + x^2 + x^3.$$

La H være underrommet av $\mathbb{P}_3$ gitt ved $H = \operatorname{Span} S$.

b) Begrunn at S er lineært uavhengig og angi dim H.

c) Begrunn at $1 \in H$. Bestem deretter en basis for $\mathbb{P}_3$ som inneholder S.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

a) La $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Begrunn at B er diagonaliserbar og bestem en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $B = P\,D\,P^{-1}$.

b) Finn løsningen til systemet av differensiallikninger

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2\,x_1(t) + 2\,x_2(t), \\ x_2'(t) &= 2\,x_1(t) + 5\,x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

som tilfredsstiller at $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 0$.

Oppgave 3.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $W = \operatorname{Col} A$.

Vi betraker $\mathbb{R}^3$ med sitt vanlige indreprodukt (prikkproduktet).

a) Finn en ortogonal basis for W og beregn $\hat{\mathbf{y}} = \operatorname{Proj}_W(\mathbf{y})$.

b) Finn minstekvadraters løsning av det (inkonsistente) systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

c) Bestem singulærverdiene til A.

d) Bestem en singulærverdi dekomposisjon $A = U\,\Sigma\,V^T$ for A.

e) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineæravbildningen som er gitt ved

$$T(\mathbf{x}) = 2\operatorname{Proj}_W(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\,,\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(Avbildningen T er den ortogonale speilingen gjennom planet W.)
Bestem standardmatrisen $[T]$ til T og matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på $\mathcal{B}$ der $\mathcal{B}$ er basisen for $\mathbb{R}^3$ som består av kolonnene til matrisen U du fant i punktet d) ovenfor.

SLUTT