MAT 1120 – Høst 2011 – Løsningsforslag

Oppgave 1

1a Utregning gir $A^2 = A$.

La $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Da er $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2x_1 - x_3 = 0,\ x_2 = 0$. Dermed er

$$\operatorname{Nul} A = \{(t, 0, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}\{(1, 0, 2)\}$$

så $\{(1, 0, 2)\}$ er en basis for $\operatorname{Nul} A$. Dimensjonsformelen gir da at

$$\operatorname{rang} A = 3 - \dim \operatorname{Nul} A = 3 - 1 = 2\,.$$

$\square$

1b Skriv $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$. Da er

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = A = A^2 = A\,[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = [A\,\mathbf{a}_1\ A\,\mathbf{a}_2\ A\,\mathbf{a}_3]$$

som viser at $A\,\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j$ for $j = 1, 2, 3$. Siden hver $\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$ viser dette at hver $\mathbf{a}_j$ er en egenvektor for A tilhørende egenverdien 1.

Vi vet ellers fra **1a** at $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ er en egenvektor for A tilhørende egenverdien 0. Nå er $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{v}$ lineært uavhengige siden

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0\,.$$

Dermed er $\{\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \mathbf{v}\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A. Det viser at A er diagonaliserbar.

$\square$

1c Vi har at

$$B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4A - 4A + I = I\,.$$

Videre er

$$B\,\mathbf{a}_j = 2\,A\,\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j = 2\,\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j$$

mens

$$B\,\mathbf{v} = 2\,A\,\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} - \mathbf{v} = -\mathbf{v}\,.$$

Dermed er $\{\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \mathbf{v}\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for B og det viser at B er diagonaliserbar.

$\square$

Oppgave 2

2a Utregning gir

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t-1 \\ 0 & t-1 & (t+1)^2+2 \end{bmatrix}.$$

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ være kolonnene i A. Siden $A^T A = [\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j]$ har vi at

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = t-1.$$

Så kolonnene er ortogonale hvis og bare hvis $t = 1$, og da er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

2b Får

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_1 = 3, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_2 = 3, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_3 = 6, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 3, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 3 \;\; \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 6$$

så

$$\operatorname{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (3, 1, 1, 1).$$

Har at avstand fra $\mathbf{y}$ til W er

$$\operatorname{dist}(\mathbf{y}, W) = \|\mathbf{y} - \operatorname{Proj}_W(\mathbf{y})\| = \|(0, 2, -1, -1)\| = \sqrt{6} > 2.$$

Dermed er $\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\| \geq \operatorname{dist}(\mathbf{y}, W) > 2$ for alle $\mathbf{w} \in W$, og det følger at ingen vektor i W har avstand 2 fra $\mathbf{y}$.

$\square$

2c Fra **2a** ser vi at egenverdiene til $A^T A$ er 3, 3 og 6. Singulærverdiene til A er dermed $\sigma_1 = \sqrt{6}$, $\sigma_2 = \sqrt{3}, \sigma_3 = \sqrt{3}$. Tilhørende egenvektorer til $A^T A$ er f.eks. henholdsvis $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. Det gir

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

For $i = 1, 2, 3$ setter vi $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$. Det gir

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{a}_3,\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{a}_2,\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{a}_1\,.$$

Vektoren $\mathbf{u}_4$ skal velges som en enhetsvektor i $\mathbb{R}^4$ som er ortogonal på $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$, m.a.o. på $W = \operatorname{Col} A$. Ved å normalisere vektoren $\mathbf{y} - \operatorname{Proj}_W(\mathbf{y}) \in W^\perp$ fra **2b** får vi vektoren

$$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(0, 2, -1, -1)\,.$$

Et mulig valg for U er derfor

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Oppgave 3

3a Sett $Q = \Big[[q_1]_\mathcal{B}\ [q_2]_\mathcal{B}\ [q_3]_\mathcal{B} \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Fra den vedlagte MATLAB-utskrift kan vi lese at $\operatorname{rref}(Q) = I$, dvs at Q er invertibel. Dermed er $\mathcal{C}$ en basis for $\mathbb{P}_2$, og $Q = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ (jf. Notat 1).

Utskriften viser dessuten at $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Dermed er

$$P = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$[r]_\mathcal{C} = P\,[r]_\mathcal{B} = P \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som betyr at $r = 2q_1 - q_2 + q_3$.

$\square$

3b Vi har at

$$[T]_{\mathcal{C}} = \Big[\, [T(q_1)]_{\mathcal{C}}\ [T(q_2)]_{\mathcal{C}}\ [T(q_3)]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \Big[\, [q_1]_{\mathcal{C}}\ [q_2]_{\mathcal{C}}\ [-q_3]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Videre er $T(r) = T(2q_1 - q_2 + q_3) = 2q_1 - q_2 - q_3 = s$ der

$$s(x) = 2(1-x) - (x + x^2) - (1 + 2x^2) = 1 - 3x - 3x^2\,.$$

Ved Notat 2 er

$$[T]_{\mathcal{B}} = Q\,[T]_{\mathcal{C}}\,Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdots = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

(d.v.s. at $[T]_{\mathcal{C}} = B$ der B er matrisen fra **1c**). $\square$

3c Vi har at $\langle q_i, q_j\rangle = [q_i]_{\mathcal{C}} \cdot [q_j]_{\mathcal{C}} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ og det gir at $\langle q_i, q_j\rangle = 1$ hvis $i = j$, $\langle q_i, q_j\rangle = 0$ hvis $i \neq j$. Dermed er basisen $\mathcal{C}$ ortonormal.

Videre, med $\mathbf{x} = [p]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = [q]_{\mathcal{B}}$, er

$$\langle p\,,\,q\rangle = [p]_{\mathcal{C}} \cdot [q]_{\mathcal{C}} = (P\,\mathbf{x})^T\,P\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\,P^T P\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\,C\,\mathbf{y}$$

der

$$C = P^T P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 7 & 6 & -4 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Anta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Da er $P\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ siden P er invertibel, og det gir at

$$\mathbf{x}^T\,C\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\,P^T\,P\,\mathbf{x} = (P\,\mathbf{x}) \cdot (P\,\mathbf{x}) > 0$$

I tillegg er C opplagt symmetrisk. Dette viser at C er positiv definitt. $\square$

3d La $p = c_1\,q_1 + c_2\,q_2 + c_3\,q_3 \in \mathbb{P}_2$. Da er

$$p = (c_1\,q_1 + c_2\,q_2) + c_3\,q_3$$

der $c_1\,q_1 + c_2\,q_2 \in M$ og $c_3\,q_3 \in M^\perp$ (siden q_3 er ortogonal på q_1 og q_2). Dette betyr at

$$\widehat{p} = c_1\,q_1 + c_2\,q_2$$

så

$$2\,\widehat{p} - p = 2(c_1\,q_1 + c_2\,q_2) - (c_1\,q_1 + c_2\,q_2 + c_3\,q_3) = c_1\,q_1 + c_2\,q_2 - c_3\,q_3 = T(p)\,,$$

som ønsket. $\square$