UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Mandag 10. desember 2012
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Noen Matlab kjøringer er vedlagt bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Det forventes at du benytter deg av Matlab-vedlegget i din besvarelse av punkt 3b. Ellers kan du henvise til det når du finner det hensiktsmessig.

Løsningsforslag

Oppgave 1

Definer $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 2, 1)$ og $\mathbf{a}_4 = (2, 1, -1, 1)$. La A være 4×4 matrisen med $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ som sine kolonner og la $W = \mathrm{Col}\, A$ være kolonnerommet til A.

1a

Angi $\mathbf{a}_4$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Finn dimensjonen til W, og begrunn svaret.

Løsning: Matlab kjøringen viser at den redusert trappeformen til A har en pivot (ledende ener) i hver av de tre første kolonnene, så de tre første kolonnene i A er en basis for W, og dimensjonen til W er 3. Ser også fra siste kolonne i redusert trappeform R at $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$.

1b

Vi betrakter nå $\mathbb{R}^4$ som et indreprodukt rom med hensyn på det vanlige Euklidske indreproduktet (dvs prikk-produktet).

Bruk Gram-Schmidt prosessen til å finne en ortogonal basis for W. Finn deretter den ortogonale projeksjonen av vektoren $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 0)$ på W.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Siden $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ *er en basis for* W *bruker vi Gram-Schmidt på disse og får*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)\\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathrm{Proj}_{W_1}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 - \tfrac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_2 - \tfrac{4}{4}\mathbf{v}_1\\
&= \mathbf{a}_2 - \mathbf{v}_1 = (1,0,-1,0)\\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \mathrm{Proj}_{W_2}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_3 - \tfrac{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\,\mathbf{v}_1 - \tfrac{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\,\mathbf{v}_2\\
&= \mathbf{a}_3 - \tfrac{5}{4}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{4}(1,-1,1,-1)
\end{aligned}$$

så $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *er en ortogonal basis for* W.

Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ *på* W *er da gitt ved*

$$\mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}\,\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 0\,\mathbf{v}_3 = (1,1/2,0,1/2)\,.$$

$\square$

1c

La B være 4×3 matrisen vi får fra A ved å slette siste kolonne, så B har $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ som sine kolonner.

Finn en QR-faktorisering av B.

Løsning: Vi normaliserer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *og får*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1).$$

La Q *være matrisen med kolonner* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. *For å finne* R *finner vi fra beregningene i b) at*

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1\\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_1 + \sqrt{2}\mathbf{u}_2\\
\mathbf{a}_3 &= \tfrac{5}{4}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \tfrac{5}{2}\mathbf{u}_1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_3.
\end{aligned}$$

Vi definerer derfor

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{2}\\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Da er $B = QR$ *en QR-faktorisering av* B. $\square$

Oppgave 2

Betrakt differenslikningen

$$y_{k+2} + 2\,y_{k+1} + y_k = 0 \quad \text{for alle } k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

for en følge $\{y_k\}$ i signalrommet $\mathbb{S}$ bestående av reelle følger indeksert over de hele tallene $\mathbb{Z}$. La W være underrommet av $\mathbb{S}$ bestående av alle løsninger av (1).

(Fortsettes på side 3.)

2a

Vis at følgen $\{y_k\}$ gitt ved $y_k = k(-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, er en løsning av (1) og finn en basis for W. Bestem løsningen av (1) som oppfyller $y_0 = 1$ og $y_1 = -3$.

Løsning: Med $y_k = k(-1)^k$ får vi

$$y_{k+2} + 2\,y_{k+1} + y_k = (-1)^k[(k+2)(-1)^2 + 2(k+1)(-1) + k] = 0$$

for alle k, som viser første del.

Videre er (1) en homogen lineær annenordens differenslikning med karakteristisk likning $r^2 + 2r + 1 = 0$, dvs. $(r+1)^2 = 0$ som har (eneste) løsning $r = -1$. Da er $y_k = (-1)^k$ en løsning av (1).

Løsningene $y_k^1 = k(-1)^k$ og $y_k^2 = (-1)^k$ er lineært uavhengige (de er opplagt ikke multiple av hverandre), og siden W har dimension 2 (ved Teorem i boka), må da disse to funksjonene være en basis for W.

Den generelle løsningen av (1) er derfor $y_k = c_1 k(-1)^k + c_2(-1)^k$. Fra initialbetingelsene $y_0 = 1$ og $y_1 = -3$, bestemmer vi $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, så løsningen av (1) som tilfredstiller disse er

$$y_k = 2k(-1)^k + (-1)^k = (-1)^k(2k+1).$$

□

2b

Definer avbildningen $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ved $T(\{y_k\}) = \{z_k\}$ der

$$z_k = \frac{1}{4}\,(y_{k+1} + 2\,y_k + y_{k-1}) \quad \text{for alle } k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Vis at T er lineær og bestem dimensjonen til kjernen til T. (Husk at kjernen til T består av følgene i $\mathbb{S}$ som T avbilder på null-følgen).

Løsning: La $\{u_k\}, \{v_k\} \in \mathbb{S}$ og $b \in \mathbb{R}$. Da er

$$T(\{u_k\} + \{v_k\}) = T(\{u_k + v_k\}) = \{\frac{1}{4}(u_{k+1} + v_{k+1} + 2u_k + 2v_k + u_{k-1} + v_{k-1})\}$$

$$= \{\frac{1}{4}(u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}) + \frac{1}{4}(v_{k+1} + 2v_k + v_{k-1})\} = T(\{u_k\}) + T(\{v_k\})\,.$$

Dessuten er

$$T(b\,\{u_k\}) = T(\{bu_k\}) = \{\frac{1}{4}(b\,u_{k+1} + 2b\,u_k + b\,u_{k-1})\}$$

$$= b\,\{\frac{1}{4}(u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1})\} = b\,T(\{u_k\})\,.$$

Dermed er T en lineær avbildning.

(Fortsettes på side 4.)

Betrakt $\{y_k\} \in \mathbb{S}$. *At* $\{y_k\}$ *er et element i kjernen til* T *betyr at*

$$\frac{1}{4}\,(y_{k+1} + 2\,y_k + y_{k-1}) = 0 \quad \textit{for alle } k \in \mathbb{Z}\,,$$

og dette er ekvivalent med at

$$y_{k+2} + 2\,y_{k+1} + y_k = 0 \quad \textit{for alle } k \in \mathbb{Z}$$

(ved å fortkorte $1/4$ *og erstatte* k *med* $k+1$*), dvs at likning (1) holder.*

Dette betyr at kjernen til T *er det samme som* W*, som vi allerede har sett har dimensjon 2.*

□

Oppgave 3

Sett $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3a

Beregn P^2 og $P^T P$. Avgjør om P er diagonaliserbar.

Løsning: Utregning gir at $P^2 = I$ *og* $P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Siden P *er triangulær ser vi at dens egenverdier er 1 (med multiplisitet lik 2) og -1 (med multiplisitet lik 1). Egenrommet* E_{-1} *er da nødvendigvis en-dimensjonalt. Utregning gir at en basis for* $E_1 = Nul(A - I)$ *er f.eks.* $\{(1, 0, 0),\, (0, 1, -1)\}$. *Dermed er* E_1 *2-dimensjonalt. Det betyr at vi vil kunne finne en basis for* $\mathbb{R}^3$ *som består av egenvektorer for* P*, og* P *vil derfor være diagonaliserbar.*

3b

Vi lar $\|\cdot\|$ betegne den vanlige normen i $\mathbb{R}^3$.

La M være maksimum av $Q(\mathbf{x}) = \|P\,\mathbf{x}\|^2$ når $\mathbf{x}$ varierer gjennom alle $\mathbf{x}$ i enhetssfæren $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Forklar hvordan du kan benytte deg av en av de vedlagte Matlab kjøringene til å anslå en approksimativ verdi for M.

Løsning: Siden $Q(\mathbf{x}) = \|P\,\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T P^T P\,\mathbf{x}$ *er den kvadratiske formen assosiert med den symmetriske matrisen* $P^T P$ *vet vi at* M *er den største egenverdien til* $P^T P$. *Den vedlagte Matlab-utskriften viser en kjøring av*

(Fortsettes på side 5.)

potensmetoden anvendt nettopp på matrisen P^TP; vi ser fra denne at en approksimativ verdi for den største egenverdien til P^TP i absoluttverdi er $7,8730$. Dermed må $M \simeq 7,8730$.

Kommentar: Regner man ut egenverdiene til P^TP ved å beregne det karakteristiske polynomet til P^TP og finne dens røtter (ved å observere først at 1 er en rot) finner man at egenverdiene er 1 og $4 \pm \sqrt{15}$. Den største er altså $4 + \sqrt{15} \simeq 7,8730$.

Oppgave 4

La $\mathbb{P}_2$ være vektorrommet bestående av alle polynomer av grad høyst 2 i en reell variabel x. La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$ og sett $\mathcal{C} = \{1, 1-x, (1-x)^2\}$.

Begrunn at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Bestem basisskiftematrisene $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ og $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} 1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ 1-x &= 1\cdot 1 - 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ (1-x)^2 &= 1\cdot 1 - 2\cdot x + 1\cdot x^2 \end{aligned}$$

så

$$P := \begin{bmatrix} [1]_{\mathcal{B}} & [1-x]_{\mathcal{B}} & [(1-x)^2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siden matrisen P har determinant lik -1 $\neq 0$, så er den invertibel. (Dette følger også fra forrige oppgave siden $P^2 = I$). Notat 1 gir da at $\mathcal{C}$ er basis og at $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Videre har vi

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0(1-x) + 0(1-x)^2 \\ x &= 1 - 1(1-x) + 0(1-x)^2 \\ x^2 &= 1 - 2(1-x) + 1(1-x)^2 \end{aligned}$$

så

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [1]_{\mathcal{C}} & [x]_{\mathcal{C}} & [x^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$

Alternativt kan vi merke oss at $P^{-1} = P$ (noe som følger fra forrige oppgave siden $P^2 = I$ og som ellers er lett å regne ut), og det gir

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} = P^{-1} = P$$

$\square$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 5

Betrakt funksjonene $f_0(x) = x$ og $f_1(x) = 2^x$ definert på $\mathbb{R}$, og følgende tre datapunkter i planet: $(0,1)$, $(1,2)$ og $(2,6)$.

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme de reelle tallene β_0 og β_1 som gir at den lineære modellen $y = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x)$ tilpasser disse datapunktene best mulig.

Løsning: Løser $X\beta = y$ der

$$X = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) \\ f_0(1) & f_1(1) \\ f_0(2) & f_1(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Får:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}, \quad X^T y = \begin{bmatrix} 14 \\ 29 \end{bmatrix},$$

og ser da at $\beta = (4/5, 1)$ er (den entydige) løsningen av normallikningene $X^T X\beta = X^T y$ og dermed minste kvadraters løsning av systemet $X\beta = y$. Dermed er $\beta_0 = 4/5$ og $\beta_1 = 1$ de ønskede verdiene. $\square$

Oppgave 6

La $n \in \mathbb{N}$ og la $\langle \cdot , \cdot \rangle$ være et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$, så $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ betegner indreproduktet av to vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
Vis at det fins en positiv definit $n \times n$ matrise A som er slik at

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{y} \quad \text{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(Vi minner om at en $n \times n$ matrise A kalles positiv definit når A er symmetrisk og $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$).

Løsning: La $A = [a_{ij}]$ være $n \times n$ matrisen definert ved $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ for $1 \leq i, j \leq n$, der som vanlig $\mathbf{e}_i$ er i'te vektor i standardbasisen for $\mathbb{R}^n$.

Betrakt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Da er $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ og $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$, så

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \Big\langle \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \sum_j y_j \mathbf{e}_j \Big\rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_i x_i \Big(\sum_j a_{ij}\, y_j \Big) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{y}.$$

Matrisen A er symmetrisk siden $a_{ji} = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = a_{ij}$ for alle $1 \leq i, j \leq n$. Videre er

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$$

for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$ (ved fjerde egenskap for indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Dermed er A positiv definit, og påstanden er dermed bevist.

$\square$

(Fortsettes på side 7.)

Matlab utskrift:

```
>>  A = [ 1 2 1 2; 1 1 1 1; 1 0 2 -1; 1 1 1 1]

 A =

     1     2     1     2
     1     1     1     1
     1     0     2    -1
     1     1     1     1

>>  R = rref(A)

R =

     1     0     0     1
     0     1     0     1
     0     0     1    -1
     0     0     0     0

>>  C = [1 1 1; 1 2 3; 1 3 6]

C =

     1     1     1
     1     2     3
     1     3     6

 >>  x = rand(3,1);
      for r = 1:10
      x = C*x;      [maxval,maxnr] = max(abs(x));
      mu = x(maxnr);   x = (1/mu)*x;
      end

     lambda=mu, error=max(abs(C*x-mu*x))


 lambda =

    7.8730

 error =

   1.2898e-09
```