UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Tirsdag 10. desember 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

I disse oppgavene betrakter vi $\mathbb{R}^n$ med sitt vanlige euklidske indreprodukt og euklidsk avtand. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

Vi lar A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vi tar det for gitt at $C = \mathrm{rref}(A)$.

1a

Finn rangen til matrisen A og finn en basis for nullrommet.

1b

Finn en ortogonal basis $\mathcal{B}$ for kolonnerommet til A.

1c

Sett $\mathbf{y} = (-2, 0, 3, 2)$. Vis at den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{y}}$ av $\mathbf{y}$ på kolonnerommet til A er $\widehat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0, 1)$. Finn alle minste kvadraters løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

1d

Utvid $\mathcal{B}$ til en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$, og finn koordinatene til $\mathbf{y}$ med hensyn på den nye basisen.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Vi lar B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2a

Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^{-1}BP = D$.

2b

Finn en singulærverdi-dekomposisjon av B, og finn den største verdien $\|B\mathbf{x}\|$ kan anta for $\|\mathbf{x}\| = 1$.

2c

Finn den generelle løsningen til differensialligningssystemet

(i) $x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$

(ii) $x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$

2d

Finn en likevektsvektor (steady state vector) $\mathbf{v_0}$ for det dynamiske systemet som er definert ved $\mathbf{v_{k+1}} = B\mathbf{v_k}$, altså som er slik at $\mathbf{v_{k+1}} = \mathbf{v_k}$ for $k = 0, 1, 2, ...$ Dersom $\mathbf{x_0}$ ikke er et multiplum av $\mathbf{v_0}$, beskriv sekvensen definert ved $\mathbf{x_{k+1}} = B\mathbf{x_k}$.

Oppgave 3

I denne oppgaven betrakter vi vektorrommet $\mathbb{P}_2$ bestående av polynomer av grad 2. Elementene er altså polynomer på formen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

3a

La $\mathcal{B}$ være mengen $\{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$, der $\mathbf{p_1}(x) = x^2 + 1, \mathbf{p_2}(x) = x + 1$ og $\mathbf{p_3}(x) = x^2$. Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$.

3b

Vi definerer en lineæravbilding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ved $T(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}(2))$. Finn matrisen til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

SLUTT