UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Tirsdag 10. desember 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

I disse oppgavene betrakter vi $\mathbb{R}^n$ med sitt vanlige euklidske indreprodukt og euklidsk avtand. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

Vi lar A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vi tar det for gitt at $C = \text{rref}(A)$.

1a

Finn rangen til matrisen A og finn en basis for nullrommet.

Løsning: Rangen er 3. Basis for nullrom er $\mathbf{v} = (1, 1, 1, -1)$.

1b

Finn en ortogonal basis $\mathcal{B}$ for kolonnerommet til A.

Løsning: Bruker G-S og finner at vi kan sette

$$\mathbf{x_1} = (1,1,1,0)$$

$$\mathbf{x_2} = (1,-1,0,1)$$

$$\mathbf{x_3} = (-1,2,-1,3)$$

(Har faktorisert ut 1/3 så det skal se penere ut)

(Fortsettes på side 2.)

1c

Sett $\mathbf{y} = (-2, 0, 3, 2)$. Vis at den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{y}}$ av $\mathbf{y}$ på kolonnerommet til A er $\widehat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0, 1)$. Finn alle minste kvadraters løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Løsning:

(i) Har $\mathbf{w} := \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}} = (-2, -1, 3, 1)$. Let å sjekke at $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x_j} = 0$ for $j = 1, 2, 3$, så $\widehat{\mathbf{y}}$ er ortognalprojeksjonen.

(ii) Vi løser $A\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{y}}$. Siden $\widehat{\mathbf{y}}$ er tredje kolonne i A er det lett å se at $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0)$ er en løsning. Vi har allerede en basis for nullrommet, så alle løsninger er på formen

$$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0) + t \cdot (1, 1, 1, -1) = (t, t, 1 + t, -t).$$

1d

Utvid $\mathcal{B}$ til en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$, og finn koordinatene til $\mathbf{y}$ med hensyn på den nye basisen.

Løsning:

(i) Har allerede sett at $\mathbf{w}$ fra forrige oppgave står ortogonalt på Col(A) så vi setter $\mathbf{x_4} = (-2, -1, 3, 1)$.

(ii) Lager en matrise M der elementene i den utvidete basisen er søyler. Koordinatvektoren til $\mathbf{y}$ m.h.p. den nye basisen er løsningen av ligningen $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vi løser ligningen og finner at $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = (1/3, 0, 1/3, 1)$. En rask måte å løse den på er å observere at siste komponent må være 1, og så bruke utregningen i **1b**.

Oppgave 2

Vi lar B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2a

Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^{-1}BP = D$.

Løsning:

Dette er en symmetrisk (2×2)-matrise med like tall langs diagonalen, så egenverdiene er $\lambda_1 = 2 + 1 = 3$, $\lambda_2 = 2 - 1 = 1$, med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ og $\mathbf{v_2} = (1, -1)$. Så vi kan sette

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 3.)

2b

Finn en singulærverdi-dekomposisjon av B, og finn den største verdien $\|B\mathbf{x}\|$ kan anta for $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Løsning:

(i) Denne kan regnes ut på vanlig måte, men skjønner vi prinsippet bak en singulærverdidekomposisjon, kan vi se at for en symmetrisk matrise er dette tilsvarende en ortogonal diagonalisering. Dermed kan vi normalisere kolonnene i matrisen i **2a** og sette

$$U = V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

og $\Sigma = D$.

(ii) Dette vet vi er den største singulærverdien, det vil si 3.

2c

Finn den generelle løsningen til differensialligningssystemet

(i) $x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$

(ii) $x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$

Løsning:

På matriseform er dette ligningssystemet $\mathbf{x'(t)} = B\mathbf{x}$. Generelt vet vi at dersom $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ er egenvektorer for B, med egenverdier λ_1, λ_2, da er den generelle løsningen gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}.$$

Vi har allerede regnet ut egenvektorene og egenverdiene, så i dette tilfellet får vi

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t}(1, 1) + c_2 e^{t}(1, -1).$$

2d

Finn en likevektsvektor (steady state vector) $\mathbf{v_0}$ for det dynamiske systemet som er definert ved $\mathbf{v_{k+1}} = B\mathbf{v_k}$, altså som er slik at $\mathbf{v_{k+1}} = \mathbf{v_k}$ for $k = 0, 1, 2, ...$ Dersom $\mathbf{x_0}$ ikke er et multiplum av $\mathbf{v_0}$, beskriv sekvensen definert ved $\mathbf{x_{k+1}} = B\mathbf{x_k}$.

Løsning:

(i) At $B\mathbf{v_0} = \mathbf{v_0}$ betyr at $\mathbf{v_0}$ er en egenvektor for B med egenverdi 1. Altså kan vi sette $\mathbf{v_0} = (1, -1)$.

(ii) Siden $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ i oppgave **2a** danner en basis for $\mathbb{R}^2$ kan enhver vektor $\mathbf{x_0}$ skrives som $\mathbf{x_0} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2}$. At $\mathbf{x_0}$ ikke er et multiplum av likevektsvektoren $\mathbf{v_2}$ ($= \mathbf{v_0}$ fra forrige oppgave) betyr at $c_1 \neq 0$. Så vi får at

$$B^k\mathbf{x_0} = c_1 \cdot 3^k\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2},$$

så vi ser at $B^k\mathbf{x_0}$ alltid ligger på linja $c_2\mathbf{v_2} + t \cdot \mathbf{v_1}, t \in \mathbb{R}$, og at $\|B^k\mathbf{x_0}\| \to \infty$ når $k \to \infty$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 3

I denne oppgaven betrakter vi vektorrommet $\mathbb{P}_2$ bestående av polynomer av grad 2. Elementene er altså polynomer på formen $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

3a

La $\mathcal{B}$ være mengen $\{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$, der $\mathbf{p_1}(x) = x^2 + 1, \mathbf{p_2}(x) = x + 1$ og $\mathbf{p_3}(x) = x^2$. Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$.

Løsning:

Vi skriver ut disse vektorene med hensyn på standarbasis for $\mathbb{P}_2$ og danner en matrise med disse som søylevektorer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten til denne matrisen er 1, så kolonnene er lineært uavhengige, som betyr at elmentene i $\mathcal{B}$ er lineært uavhengige. Samtidig vet vi at $\mathbb{P}_2$ er et 3-dimensjonalt vektorrom, så $\mathcal{B}$ er en basis.

3b

Vi definerer en lineæravbilding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ved $T(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}(2))$. Finn matrisen til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Løsning: (Her burde det nok vært presisert med hensyn på basisen $\mathcal{B}$ for $\mathbb{P}_2$ og standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, men noe annet gir ikke mening.) Dersom vi lar $\mathcal{S}$ betegne standard basis for $\mathbb{R}^3$ vet vi at matrisen er gitt ved

$$A_T = [[T(\mathbf{p_1})]_{\mathcal{S}}[T(\mathbf{p_2})]_{\mathcal{S}}[T(\mathbf{p_3})]_{\mathcal{S}}].$$

Vi har $T(\mathbf{p_1}) = (1, 2, 5), T(\mathbf{p_2}) = (1, 2, 3), T(\mathbf{p_3}) = (0, 1, 4)$, så vi får at

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

SLUTT