UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Tirsdag 9. desember 2014.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

I denne oppgaven betrakter vi $\mathbb{R}^4$ utstyrt med det vanlige Euklidske indreproduktet (m.a.o. prikkproduktet). Betrakt vektorene $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^4$. Disse vektorene er lineært uavhengige, men du behøver ikke vise dette. La $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

1a

Finn en ortonormal basis for W.

La $\mathbf{b} = (3, 2, -2, -1)$ og betrakt likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 3 \\ & & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \tag{1}$$

1b

Beregn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på W. Finn minste kvadraters løsning av likningssystemet (1).

Oppgave 2

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$ og betrakt det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Er $\mathbf{0}$ en attraktor for dette systemet ? (Forklar svaret ditt).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3a

Beregn $B = A^T A$. Bestem deretter egenverdiene til B og angi de tilhørende egenrommene.

3b

Finn en singulærverdi dekomposisjon (SVD) for A.

3c

La E være mengden av alle punkter (x_1, x_2) i x_1x_2-planet som oppfyller den kvadratiske likningen

$$6\,x_1^2 + 2\,x_1x_2 + 6\,x_2^2 = 35\,.$$

Begrunn at E er en ellipse og lag en skisse av E i x_1x_2-planet.

Oppgave 4

Vi minner om at $\mathbb{P}_n$ betegner vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre eller lik n i en reell variabel x. For $k = 0, \ldots, n$ lar vi $p_k \in \mathbb{P}_n$ være definert ved $p_k(x) = x^k$. Videre lar vi $\mathcal{B} = \{p_0,\, p_1,\, p_2\}$ og $\mathcal{C} = \{p_0,\, p_1,\, p_2,\, p_3\}$ betegne standardbasisene for henholdsvis $\mathbb{P}_2$ og $\mathbb{P}_3$.

La $a \in \mathbb{R}$. Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$q_1(x) = x - a\,,\; q_2(x) = x\,(x-a)\,,\; q_3(x) = x^2\,(x-a)\,.$$

Sett $W = \{q \in \mathbb{P}_3 \mid q(a) = 0\}\,.$

4a

Begrunn at $\{q_1,\, q_2,\, q_3\}$ er lineært uavhengig.

4b

Begrunn at W er et underrom av $\mathbb{P}_3$. Vis deretter at $\{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for W.

4c

Definer en lineær avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ ved

$$[T(p)](x) = (x-a)\,p(x) \qquad \text{for alle } p \in \mathbb{P}_2\,.$$

Bestem matrisen M til T med hensyn på $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$. Begrunn at T er 1-1 og at bildet av T er lik W (m.a.o. at $\{T(p) \mid p \in \mathbb{P}_2\} = W$).

(Fortsettes på side 3.)

4d

Begrunn at det finnes et indreprodukt på $\mathbb{P}_3$ som er slik at $\{q_1, q_2, q_3\}$ blir en ortonormal basis for W, samtidig som $W^{\perp} = \text{Span}\{p_0\}$.

Lykke til!

Matlab-utskrift

```
>> A = [0 0 0.5; 0.2 0 0; 0 0.6 0.9]

A =

        0         0    0.5000
   0.2000         0         0
        0    0.6000    0.9000

>>  eig(A)

ans =

  -0.0322 + 0.2473i
  -0.0322 - 0.2473i
   0.9645 + 0.0000i

>> abs(ans(1))

ans =

    0.2494
```