UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Mandag, 11. desember 2017.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 2b osv.) teller likt.
Merk: Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1a

Vis at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A. Finn alle egenverdiene til A.

Løsning :
Vi har

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{x}.$$

Dette viser at $\mathbf{x}$ er egenvektor med egenverdi 4. Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$
$$(3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1).$$

Vi har $(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ eller $\lambda = 4$, og vi ser at egenverdiene blir 4 (med multiplisitet 1) og 2 (med multiplisitet 2).

(Fortsettes på side 2.)

1b

Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A.

Løsning :

A er symmetrisk derfor ortogonalt diagonaliserbar. Egenvektorer til $\lambda = 2$ er løsninger av likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 + \quad x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_3 = -x_1$ og

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ blir en basis for egenrommet til $\lambda = 2$. Dette blir også en ortogonalbasis som sammen med $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ gir en ortogonal basis av egenvektorer for $\mathbf{R}^3$. Setter vi nå

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

er P en matrise med ortonormale kolonner som er egenvektorer for A og som danner en basis for $\mathbf{R}^3$. Settes $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ vil P og D da ortogonalt diagonalisere A.

1c

Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3\,x_3^2 + 2\,x_1x_3$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Finn en ortogonal 3×3 matrise P slik at variabelskifte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transformerer $Q(\mathbf{x})$ til en kvadratisk form uten kryssledd. Angi den nye kvadratiske formen og finn maksimum av $Q(\mathbf{x})$ når $\mathbf{x}$ varierer gjennom alle $\mathbf{x}$ i enhetssfæren $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \; : \; ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

Løsning :

Vi ser at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ så om vi setter $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ der P er matrisen fra (b) over, så får vi (siden P og D digonaliser A) at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$. Vi vet videre fra teorien at nå $\mathbf{x}$ varierer gjennom alle $\mathbf{x}$ med $||\mathbf{x}|| = 1$ blir maksimum av $Q(\mathbf{x})$ den største egenverdien til A altså lik 4.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2

La A være 3×2 matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \mathrm{Col}A$ være kolonnerommet til A.

2a

Finn en ortonormal basis $\mathcal{B}$ for W. Finn en QR-faktorisering av A.

Løsning :

Sett $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sett $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$ og

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{v_1}}{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1}} \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ blir da en ortogonal basis for W. Setter vi $\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1}/||\mathbf{v_1}|| = (1/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w_2} = \mathbf{v_2}/||\mathbf{v_2}|| = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, vil $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ bli en ortonormal basis for W.

Vi har $\mathbf{u_1} = (\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} = \sqrt{3}\,\mathbf{w_1}$ og $\mathbf{u_2} = (\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} + (\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} = \sqrt{3}\,\mathbf{w_1} + (2\sqrt{2})\,\mathbf{w_2}$. Vi setter nå

$$Q = [\mathbf{w_1}\, \mathbf{w_2}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ og } R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vi har da $A = QR$ og siden kolonnene til Q er en ortonormal basis for kolonnerommet til A og R er en øvre triangulær blir dette en QR faktorisering av A.

2b

Sett $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$. Beregn den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{Proj}_W(\mathbf{y})$ av $\mathbf{y}$ ned i W. Skriv $\mathbf{y}$ som en sum $\mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}$ der $\mathbf{y_1} \in W$ og $\mathbf{y_2} \in W^{\perp}$. (Her betegner $W^{\perp}$ det ortogonale komplementet til W.)

Løsning :

Vi har

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{Proj}_W(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} = (-\sqrt{3})\mathbf{w_1} + (-6\sqrt{2})\mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 4.)

Vi setter nå $\mathbf{y_1} = \widehat{\mathbf{y}}$ og $\mathbf{y_2} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ Vi får da $\mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}$ der $\mathbf{y_1} \in W$ og $\mathbf{y_2} \in W^{\perp}$.

2c

Finn β_0 og β_1 slik at grafen til funksjonen $y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ gir beste minste kvadraters tilpassing til måleresultatene $(-1,\ 0.4)$, $(1,\ 0.1)$, $(3,\ -0.8)$. Sett $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ -0.8 \end{bmatrix}$. Finn feilvektoren $\epsilon = \mathbf{u} - \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(1) \\ f(3) \end{bmatrix}$.

Løsning :

$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ blir minste kvadraters løsning av likningen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ -0.8 \end{bmatrix} = (0.1)\mathbf{y}.$$

Dette blir igjen løsningen av likningen

$$A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \text{Proj}_W((0.1)\mathbf{y}) = (0.1) \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \\ -0.7 \end{bmatrix}.$$

Likningsystemet over har utvidet matrise $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & 3 & -0.7 \end{bmatrix}$ og rekkereduserer vi denne til redusert trappeform får vi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dette gir $\beta_0 = 0.2$ og $\beta_1 = -0.3$.

(Denne oppgaven kan også løses ved å løse normallikningen $A^T A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = A^T \mathbf{u}$, og om vi da bruker QR-faktoriseringen fra (a) vil normallikningen redusere seg til å løse likningen $R \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = Q^T \mathbf{u}$.)

Vi får da at $\begin{bmatrix} f(-1) \\ f(1) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \\ -0.7 \end{bmatrix}$, og at

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ -0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.1 \\ -0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} = (0.1)\mathbf{y_2}.$$

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Vis at 2 er en egenverdi til A. Avgjør om A er diagonaliserbar.

Løsning :

Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$$
$$(3-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda) - 4(1+\lambda) = (1+\lambda)(-\lambda^2+\lambda+2).$$

Vi har at $-\lambda^2+\lambda+2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ eller $\lambda = -1$, spesielt blir 2 en egenverdi. (For å vise dette separat er det nok å vise at $\det(A-2I) = 0$.) Vi ser da $\lambda = -1$ blir egenverdi med multiplisitet 2 og $\lambda = 2$ får multiplisitet 1. Det er da klart at $\mathbf{R}^3$ har en basis av egenvektorer for A hvis og bare hvis dimensjonen til egenrommet til -1 er 2. Dvs. A er diagonaliserbar hvis og bare hvis dimensjonen til egenrommet til -1 er 2. Egenvektorer til $\lambda = -1$ er løsninger av likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad - 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2x_1 \quad -x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_3 = 2x_1$ og

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ blir en basis for egenrommet til $\lambda = -1$, og dimensjonen til dette egenrommet er da 2 så A blir diagonaliserbar.

Oppgave 4

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel t. La $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{P}_2$, dvs $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ og $p_2(t) = t^2$.

Definer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_2$ ved

$$q_1(t) = 1 + t\,,\; q_2(t) = t + t^2,\; q_3(t) = t - t^2\,.$$

4a

Begrunn at $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Finn basisskifte-matrisen, $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, og finn den tilsvarende basisskifte-matrise $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Løsning :

Siden $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ er det nok å vise at $\{q_1, q_2, q_3\}$ er lineært uavhengig. La $c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 = 0$ (0 her betyr det konstante polynomet som er lik 0).

(Fortsettes på side 6.)

Dette gir oss $c_1 + (c_1 + c_2 + c_3)t + (c_2 - c_3)t^2 = c_1 p_0 + (c_1 + c_2 + c_3)p_1 + (c_2 - c_3)p_2 = 0$. Siden $\{p_0, p_1, p_2\}$ er lineært uavhengig må

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\qquad &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Siden $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$, er koeffisientmatrisen til likningssystemet over invertibel og vi må derfor ha $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ dvs. $\{q_1, q_2, q_3\}$ er lineært uavhengig. Alternativt her kan en si at: $[[q_1]_\mathcal{B}\,[q_2]_\mathcal{B}\,[q_3]_\mathcal{B}] = [S_\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ er invertibel og da følger det fra Notat 1 at $\mathcal{C}$ er en basis.

Vi har at

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = [[q_1]_\mathcal{B}\,[q_2]_\mathcal{B}\,[q_3]_\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fra MatLAB utskriften ser vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = (\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Definer en lineæravbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved at et polynom $p \in \mathbb{P}_2$ avbildes over i $T(p)$, der

$$\big(T(p)\big)(t) = p(1) + tp'(t).$$

4b

Finn matrisen $[T]_\mathcal{B}$ for T relativt til $\mathcal{B}$. Finn også matrisen $[T]_\mathcal{C}$ for T relativt til $\mathcal{C}$.

Løsning :

Vi har $T(p_0) = 1$, $T(p_1) = 1 + t$ og $T(p_2) = 1 + 2t^2$ så vi får:

$$[T]_\mathcal{B} = [[T(p_0)]_\mathcal{B}\,[T(p_1)]_\mathcal{B}\,[T(p_2)]_\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har videre:

$$[T]_\mathcal{C} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\,[T]_\mathcal{B}\,\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 7.)

4c

Finn en egenvektor for $[T]_{\mathcal{B}}$ med egenverdi 2. Finn $p \in \mathbb{P}_2$ slik at $T(p) = 2p$.

Løsning :

For å finne en slik egenvektor må vi løse likningen $([T]_{\mathcal{B}} - 2I)\mathbf{x} = 0$. Dvs. likningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 &= 0. \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir $x_1 = x_3$ og $x_2 = 0$ så $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir en slik egen egenvektor. Settes $p = 1 + t^2$ har vi $[p]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, og vi får da $[T(p)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[p]_{\mathcal{B}} = 2\,[p]_{\mathcal{B}}$ så vi må ha $T(p) = 2p$.

Lykke til!

(Fortsettes på side 8.)

Matlab-utskrift.

```
>> C

C =

     1        0       0       1      0      0
    -0.5      0.5     0.5     0      1      0
    -0.5      0.5    -0.5     0      0      1

>> rref(C)

ans =

     1      0      0      1      0      0
     0      1      0      1      1      1
     0      0      1      0      1     -1
```