UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag, 4. desember 2019.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 10 sider.

Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 2b osv.) teller likt.
Merk: Den vedlagte Matlab-utskriften er aktuell for deloppgave 4b. Du kan henvise til denne når du finner det hensiktsmessig. Merk at en tilnærmet verdi for $1/\sqrt{2}$ *er* 0.7071.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La $W = \operatorname{Col} A$ være kolonnerommet til A og la $\operatorname{Nul} A$ være nullrommet til A.

1a

Finn en basis for W. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$.

Løsning:
Rekkereduserer vi A får vi at

$$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at 1. og 2. kolonne er pivotkolonner og vi må derfor ha at $\left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for W. Hvis $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Nul} A$ må vi ha

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\; 2x_3 &= 0 \\ x_2 + \quad x_3 &= 0. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

Vi får da $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser av dette at $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for Nul$A$. $\square$

I deloppgavene **1b** og **1c** nedenfor er $\mathbb{R}^4$ gitt med vanlig prikkprodukt.

1b

Finn en ortogonal basis for W.

Løsning:
Vi setter $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$ og

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ blir da en ortogonal basis for W.

Sett $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\square$

1c

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ ned i W. Finn alle minste kvadraters løsninger av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Løsning: Vi har

$$\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{8}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Å finne alle minste kvadraters løsninger av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ er det samme som å løse likningen $A\hat{\mathbf{x}} = \text{Proj}_W y$. Dette er da likningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &+2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 \; &+4x_3 = 1 \\ x_1 + \;\; x_2 \; &+3x_3 = 2. \end{aligned}$$

Setter vi $x_3 = 0$ får vi $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ blir en spesiell løsning av systemet. Alle minste kvadrates løsninger blir da på formen:

(Fortsettes på side 3.)

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (summen av en spesiell løsning og en vektor i Nul$A$).

Som et alternativ kan en sette opp normallikningssystemet og løse dette: Vi får da $A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 6 & 14 \\ 12 & 14 & 38 \end{bmatrix}$. Videre har vi $A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix}$. Vi må så løse lkningssystemet med utvidet matrise $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 8 \\ 4 & 6 & 14 & 6 \\ 12 & 14 & 38 & 22 \end{bmatrix}$. Etter å ha rekkeredusert B ser vi at $rref(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dette gir oss at $x_1 = 3 - 2x_3$ og $x_2 = -1 - x_3$ og vi får de samme løsningene som i sted. $\square$

Anta nå at $\mathbb{R}^4$ er utstyrt med det vektede indre produktet gitt ved
$< \mathbf{x}, \mathbf{u} >= 2x_1u_1 + 2x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$
for $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ og $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. (Det er ikke meningen at du skal vise at dette er et indreprodukt.)

1d

Finn en ortogonal basis for W med hensyn på dette indre produktet. Finn $\hat{\mathbf{y}} \in W$ slik at $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|$ er minst mulig, når normen $\|\cdot\|$ nå er definert ved $\|\mathbf{x}\|^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ og $\mathbf{y}$ er vektoren vi definerte i 1c.

Løsning

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ være basisen for W fra 1a. Sett $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1$ Sett

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{< \mathbf{a}_2, \mathbf{w}_1 >}{< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 >}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ blir nå en ortogonal basis for W med det vektede indre produktet. (Vi ser altså at dette faktisk ble den samme basisen som den basisen som vi regnet ut i 1b som da var ortogonal med vanlig prikk produkt.)
For å finne $\hat{\mathbf{y}}$ må vi beregne ortogonal projeksjonen av $\mathbf{y}$ ned i W med hensyn på det vektede indre produktet. Vi får da

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{< \mathbf{y}, \mathbf{w}_1 >}{< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 >}\mathbf{w}_1 + \frac{< \mathbf{y}, \mathbf{w}_2 >}{< \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 >}\mathbf{w}_2 = \frac{6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-4}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har da $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$ for enhver $\mathbf{z} \in W$, $\mathbf{z} \neq \hat{\mathbf{y}}$. $\square$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2a

Vis at $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$.

Løsning

Sett $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi har da

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{v}_1.$$

Dette viser at $\mathbf{v}_1$ er egenvektor til A med egenverdi 4.
Vi har nå

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$
$$(3-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - (4-\lambda) = (4-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1).$$

Vi har $(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ eller $\lambda = 4$, og vi ser at egenverdiene blir 4 (med multiplisitet 2) og 2 (med multiplisitet 1). Egenvektorer til $\lambda = 4$ er løsninger av likningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_3 = x_1$ og

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ blir en basis for egenrommet til $\lambda = 4$. (Det er forøvrig lett å se direkte fra A at også $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er egenvektor

(Fortsettes på side 5.)

til 4(i tillegg til $\mathbf{v}_1$), så vi kan også finne basis til egenrommet uten å sette opp likningsystemet over.) Egenvektorer til $\lambda = 2$ er løsninger av likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 &= 0 \\ 2x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_2 = 0, x_3 = -x_1$ og $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vi ser at $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ blir basis for egenrommet til 2.

La nå $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Da har P kolonner som er en ortonormal basis av egenvektorer, så P er en ortogonal matrise slik at $A = PDP^T$ der $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\square$

2b

Finn løsningen til systemet av differensiallikninger

$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ som tilfredstiller $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Løsning

Fra 2a vet vi at generell løsning av systemet er

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi må altså ha

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi må da løse et likningssystem med utvidet matrise $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Etter rekkereduksjon får vi $rref(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dette gir oss $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1$. Den søkte løsning blir da

$$\mathbf{x}(t) = 2e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(Fortsettes på side 6.)

□

Oppgave 3

La $\mathcal{B}$ være delmengden $\{1,\, e^x \cos x,\, e^x \sin x\}$ av vektorrommet av uendelig mange ganger deriverbare reelle funksjoner på $\mathbb{R}$. La $V = \operatorname{Span}\mathcal{B}$. Da er $\mathcal{B}$ en basis for V (det er ikke meningen du skal vise dette).

La $\mathcal{C} = \{1 + e^x \cos x, 1 + e^x \sin x, e^x(\cos x + \sin x)\}$.

3a

Vis at $\mathcal{C}$ er en basis for V. Finn basisskifte-matrisen, $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, og finn den tilsvarende basisskifte-matrise $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Løsning

Vi setter $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ og $\mathcal{C} = \{g_1, g_2, g_3\}$. Vi har $[g_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[g_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $[g_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sett $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at $\det M = -2 \neq 0$ så M er invertibel. Siden kolonnene til M er koordinatvektorene til vektorene i $\mathcal{C}$ er $\mathcal{C}$ en basis. Vi har videre at $M = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$. La $C = [M\ I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Etter rekkereduksjon har vi at $rref(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Dette betyr at

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

□

3b

Definer en lineæravbildning $T : V \to V$ ved at en funksjon $f \in V$ avbildes over i $T(f)$, der

$$T(f)(x) = f'(x).$$

(Du trenger ikke vise at T er en lineæravbildning.)
Finn en matrise $[T]_{\mathcal{B}}$ slik at $[T(f)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$, og en matrise $[T]_{\mathcal{C}}$ slik at $[T(f)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}$ for alle $f \in V$.

Løsning

(Fortsettes på side 7.)

Vi har $f_1'(x) = 0$, $f_2'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$ og $f_3'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$.

Dette gir oss $[T(f_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[T(f_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[T(f_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Fra dette får vi at $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har tilslutt at

$$[T]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [T]_{\mathcal{B}} \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

3c

La $S : V \to V$ være lineæravbildningen gitt ved

$$S(f)(x) = f''(x) - 2f'(x) + 2f(x).$$

(Du trenger heller ikke her vise at S er en lineæravbildning.)
Finn en matrise $[S]_{\mathcal{B}}$ slik at $[S(f)]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ for alle $f \in V$. Finn $\ker S = \{f \in V \,:\, S(f) = \mathbf{0}\}$. (Her er altså $\mathbf{0}$ funksjonen som er konstant lik 0.)

Løsning

Merk at $f''(x) = T(T(f))(x)$. Derfor må vi ha $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^2 - 2[T]_{\mathcal{B}} + 2I$. Dvs. vi får

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan vi regne ut $S(f_1) = 2, S(f_2) = S(f_3) = 0$ og vi får

$$[S]_{\mathcal{B}} = [[S(f_1)]_{\mathcal{B}} \; [S(f_2)]_{\mathcal{B}} \; [S(f_3)]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser av dette at $\operatorname{Nul}[S]_{\mathcal{B}} = \operatorname{Span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Vi må da ha at $\ker S = \operatorname{Span}\{f_2, f_3\} = \operatorname{Span}\{e^x \cos x, e^x \sin x\}$. □

Oppgave 4

4a

Avgjør om matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 8.)

er diagonaliserbar.

Løsning

Vi har

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1)$$
$$= (4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (4-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Vi ser av dette at $\lambda = 2$ er en egenverdi med multiplisitet 2. For å finne egenrommet til denne egenverdien må vi løse likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får da $x_1 = 0$ og $x_3 = -x_2$. Vi ser av dette at $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for egenrommet til $\lambda = 2$. Dette egenrommet har da dimensjon lik 1, mens egenverdien har multiplisitet lik 2. Dette medfører at matrisen ikke kan være diagonaliserbar. $\square$

4b

La

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Bestem en singulærverdi dekomposisjon $B = U\,\Sigma\,V^T$. Finn en vektor $\mathbf{y}$ med $\|\mathbf{y}\| = 1$ slik at

$$\|B\mathbf{y}\| = \max\{\|B\mathbf{x}\| \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Løsning

Vi har

$$B^T B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -32 \\ 0 & -32 & 32 \end{bmatrix}.$$

Fra den vedlagte MatLab utskriften følger at $B^T B$ har egenverdier 64, 4 og 0 og at disse egenverdiene har ortonormale egenvektorer lik henholdsvis $\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(Fortsettes på side 9.)

Vi kan derfor sette $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Singulærverdiene blir $\sigma_1 = \sqrt{64} = 8$, $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$ og 0. Siden Σ her blir en 3×3 matrise får vi $\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sett nå $\mathbf{u}_1 = (1/\sigma_1)B\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = (1/\sigma_2)B\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. For å utvide dette til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ setter vi $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (eller $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$). Vi får nå en singulærverdi dekomposisjon ved å sette $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

$\max\{\|B\mathbf{x}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ oppnåes i en egenvektor for $B^T B$ svarende til den største egenverdien (dette er forklart i boka). Vi kan derfor sette $\mathbf{y} = \pm\mathbf{v}_1$.

Lykke til!

(Fortsettes på side 10.)

Matlab-utskrift.

```
>>C=[4 0 0
0 32 -32
0 -32 32]

C =

     4         0         0
     0        32       -32
     0       -32        32

>> [V D]=eig(C)

V =
           0      1.0000         0
     -0.7071           0   -0.7071
     -0.7071           0    0.7071




D =

       0         0         0
       0         4         0
       0         0        64
```