# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT 1120 — Lineær algebra |
| Eksamensdag: | Fredag 4 desember, 2020 |
| Tid for eksamen: | 15.00 – 19.00 |
| Oppgavesettet er på 4 sider. | |
| Vedlegg: | En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet. |
| Tillatte hjelpemidler: | Se første siden i Inspera. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

*Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.*

## Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 1a

Finn en basis $\mathcal{B}$ for kolonnerommet til $A$ som består av kolonnevektorer til $A$. Skriv kolonnevektorene til $A$ som ikke er med i basisen $\mathcal{B}$ som lineære kombinasjoner av vektorene i $\mathcal{B}$.

### 1b

Bestem $\dim(\operatorname{Nul} A)$. Finn en $5 \times 3$ matrise $B$ som er slik at $\operatorname{rank} B = 2$ og $AB = O$ ($= 4 \times 3$ nullmatrisen).

## Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

*(Fortsettes på side 2.)*

### 2a

Begrunn at $A$ er diagonaliserbar. Bestem en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for $A$.

### 2b

Fikser en vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ og betrakt følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k, \quad k \geq 0.$$

Begrunn at $\|\mathbf{x}_k\| = C$ for alle $k \geq 1$ for en konstant $C \geq 0$,
der $\|\mathbf{x}\| := \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$ når $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

## Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel $x$. Sett $p_1(x) = x - 1$ og $p_2(x) = x^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og la $W$ være underrommet av $\mathbb{P}_2$ som er utspent av $p_1$ og $p_2$.

### 3a

Betrakt følgende punkter i $xy$-planet: $(-1, 1), (0, 1)$ og $(1, 1)$.

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme de reelle tallene $\hat{c}_1$ og $\hat{c}_2$ som gir at polynomet $\hat{c}_1\,p_1 + \hat{c}_2\,p_2$ tilpasser disse punktene best mulig, i den forstand at utrykket

$$\left((p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 1)^2\right)^{1/2}$$

oppnår sitt minimum blant polynomene $p$ i $W$ når $p = \hat{c}_1\,p_1 + \hat{c}_2\,p_2$.

### 3b

Vi betrakter nå $\mathbb{P}_2$ som et indreprodukt rom med hensyn på indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in \mathbb{P}_2.$$

La $W$ være som ovenfor, og la $q \in \mathbb{P}_2$ være gitt ved $q(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
Finn en ortogonal basis for $W$ og bestem den ortogonale projeksjonen av $q$ ned i $W$.

### 3c

Beregn avstanden fra $q$ til underrommet $W$ ovenfor og finn en basis for $W^\perp$ (det ortogonale komplementet til $W$).

*(Fortsettes på side 3.)*

# Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ og la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sett også

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Vi betrakter $\mathbb{R}^2$ med sitt vanlig indreprodukt (dvs prikkproduktet).

## 4a

Begrunn at $A$ er positiv definitt. Finn en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$ som er slik at $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

## 4b

Finn $2 \times 2$ matrisen $Q$ som er slik at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = Q\,\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
Anta at $\mathbf{y} \in \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}$ og sett $(y_1', y_2') := [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$. Vis at

$$(y_1')^2 + \frac{(y_2')^2}{6^2} = 1$$

(som er likningen for en ellipse på standard form i $\mathcal{B}$-koordinater).

## 4c

La $B$ være en $n \times n$ reell matrise som er positiv definitt. Begrunn at $B$ er invertibel, og at $B^{-1}$ er positiv definitt.

*Lykke til!*

*Husk Matlab-utskriften på neste side!*

*(Fortsettes på side 4.)*

**Matlab-utskrift.**

```
>> A =  [1 0 1 1 0; 0 1 -1 1 0; 1 0 1 3 1; -1 1 -2 0 0]

A =

     1     0     1     1     0
     0     1    -1     1     0
     1     0     1     3     1
    -1     1    -2     0     0

>> R = rref(A)

R =

       1          0          1          0        -1/2
       0          1         -1          0        -1/2
       0          0          0          1         1/2
       0          0          0          0          0



>> A = [ 1  -2   2; 1  -2   1;  0   0  -1]

A =
     1    -2     2
     1    -2     1
     0     0    -1

>> poly(A)

ans =

    1   2   1   0
```