MAT1120 - H05 - Fasit

Oppgave 1

a) Siden det(M)= 0 er M ikke invertibel.

b) Man finner at Nul M = = Nul $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
så f.eks. er Nul $M = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

c) $\mathbf{x}_1$ er en egenvektor for M tilh. egenverdien 1, mens $\mathbf{x}_2$ er en egenvektor for M tilh. egenverdien 3. Fra a) (eller b)) vet man at 0 også er en egenverdi for M. Matrisen M har altså tre forskjellige egenverdier, så M er spesielt diagonaliserbar.

d) Med $\mathbf{y}_0 = c_0\mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ vil $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}\mathbf{y}_n = c_2\mathbf{x}_2$.

Oppgave 2

a) A har pivoter i 1., 2. og 4. kolonne. Så rang $A = 3$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ er en basis for Col A (der $\mathbf{a}_j$ angir j-te kolonnevektor i A).

b) Har at $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ (mao $2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$). Videre er $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ og $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$. Satt sammen gir dette at

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Man finner at $\text{proj}_U(\mathbf{a}_4) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

der $U = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. Da er $\mathbf{a}_4 -$ $\text{proj}_U(\mathbf{a}_4) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

ortogonal på $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$.

d) $\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Videre er da avstanden fra $\mathbf{y}$ til W gitt ved

$$\|\mathbf{y} - \text{proj}_W(\mathbf{y})\| = \| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \| = \sqrt{6}.$$

e) Det er rett frem å sjekke at $T(p+q) = T(p) + T(q)$ og at $T(cp) = cT(p)$ for alle $p, q \in \mathcal{P}_2, c \in \mathbb{R}$.

f) Enkel utregning gir at $T(1) = \mathbf{b}_1, T(t) = \mathbf{b}_2$, mens $T(t^2) = \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4$. Ved å bruke svarene fra b) får man at $[T]_{\mathcal{B}} = M$ (= matrisen fra oppgave 1). Siden denne matrisen ikke er invertibel (jf. 1a)) kan vi slutte at T ikke er en isomorfi.