PLENUM 11.09

§1.2: 31

$\boxed{a}$ Bevis at viss m er partall så er mn partall, for $m, n \in \mathbb{Z}$.

Siden m er partall kan m skrives $m = 2k$ der $k \in \mathbb{Z}$

Da er $m \cdot n = 2k \cdot n = 2(kn)$

Så mn er 2 ganger et helt tall, altså et partall.

$\boxed{b}$ Viss m og n er oddetall så er mn odde. ($m, n \in \mathbb{Z}$).

Per definisjon av oddetall finnes $k, l \in \mathbb{Z}$ slik at
$$m = 2k+1$$
$$n = 2l+1$$

Da
$$mn = (2k+1)(2l+1) = 2k \cdot 2l + 2k + 2l + 1$$
$$= 2(2kl + k + l) + 1$$
$$= 2p+1, \text{ der } p = 2kl + k + l$$

Så mn er et oddetall.

§2.1) 1) $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Vis at viss $a \mid b$ og $a \mid c$ og $m,n \in \mathbb{Z}$ så $a \mid bm+cn$.

$a \mid b$ betyr at det finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at

$$b = ka$$

Tilsvarende finnes $l \in \mathbb{Z}$ med

$$c = la$$

Da ser vi

$$bm+cn = kam + lan = a(km+ln)$$

Så $bm+cn$ er a ganger et heltall

så $a \mid bm+cn$.

4) Vis at for alle heltall n så er n^2+n+5 oddetall.

Viss n partall: $n = 2k$

$n^2+n+5 = (2k)^2 + 2k + 5 = 4k^2+2k+5$

$= 4k^2+2k+4+1 = 2(2k^2+k+2)+1$

$= 2p+1$, der $p = 2k^2+k+2$

Så n^2+n+5 oddetall.

Viss n oddetall: $n = 2k+1$

$n^2+n+5 = (2k+1)^2 + 2k+1 + 5$

$= 4k^2 + 2\cdot 2k\cdot 1 + 1 + 2k + 6 = 4k^2+4k+2k+7$

$= 4k^2+6k+6+1 = 2(2k^2+3k+3)+1$

$= 2r+1$ der $r = 2k^2+3k+3$

Så n^2+n+5 oddetall.

§2.2 2) Vis at ingen heltall er både partall og oddetall.

Metode 1 Ved Euklids divisjon finnes for et heltall n entydige q og r med

$$n = 2q + r \quad \text{der} \quad 0 \leq r < 2$$

Siden r er entydig så kan ikke n være både oddetall og partall.

Metode 2 Anta n er odde og partall.

$$n = 2k = 2\ell + 1$$

$$2k - 2\ell = 1$$

$$2(k-\ell) = 1$$ så da er 1 partall.

Alle tall m oppfyller $m \leq 0$ eller $m \geq 1$

Så alle m oppyller $2m \leq 2 \cdot 0$ eller $2m \geq 2 \cdot 1$

$$2m \leq 0 \text{ eller } 2m \geq 2$$

Så alle partall (ting på formen $2m$) er mindre enn 0 eller større enn 2, så 1 er ikke et partall.

Dermed har vi en motsigelse, så n er ikke både oddetall og partall.

3) Vis at det finnes ingen heltall m og n slik at $8m + 26n = 1$.

Anta slike n, m finnes:

$$8m + 26n = 1$$

$$2(4m + 13n) = 1$$

Så 1 er et partall, men det er også et oddetall. Dette er motsigelse ved opg. 2. Så slike n og m kan ikke finnes.

§2.3 1) Vis at $\sqrt{3}$ er irrasjonell.
Hint: Bruk 2.2.6a som sier:
Hvis n er heltall og $3|n^2$ så vil $3|n$.
Anta $\sqrt{3}$ er rasjonell, dvs

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$ der a og b hele tall.

Siden et helt tall ikke kan være delelig med 3 vendelig mange ganger, så kan vi forkorte felles faktorer i a og b, så vi kan anta at ikke både a og b er delelig med 3.

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$3b^2 = a^2$ Ser at $3|a^2$. Ved 2.2.6a så må $3|a$ så $a = 3k$ der k helt tall.

$$3b^2 = (3k)^2 = 9k^2$$

$b^2 = 3k^2$ Ser at $3|b^2$ så ved 2.2.6.a så må $3|b$.

Men da har vi vist at $3|a$ og $3|b$, men vi antok at ikke begge var sanne, så vi har en motsigelse. Altså er $\sqrt{3}$ irrasjonell.