PLENUM 18.09

§4.1 31 A og B er mengder. Vis at viss $x \notin B$ og $A \subseteq B$ så er $x \notin A$.

$A \subseteq B$ betyr
$\forall x \; x \in A \Rightarrow x \in B$
ekvivalent med
$\forall x \; x \notin B \Rightarrow x \notin A$ *
Så vi har $x \notin B$ og * så $x \notin A$.

Alternativt: Anta for motsigelse at $x \in A$.
Siden $x \in A \Rightarrow x \in B$ må $x \in B$. Så $x \in B$ og $x \notin B$ som er en motsigelse, så $x \notin A$.

7) $A = \{ x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{R}$

ⓐ Vise at $x+y\sqrt{2}=0$ viss og bare viss $x=y=0$.

Siden $x, y \in \mathbb{Q}$ kan vi skrive $x = \frac{a}{b}$ $y = \frac{c}{d}$ der $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\sqrt{2} = 0$$

$$\frac{c}{d}\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

Viss $c \neq 0$ $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ som er en brøk, altså er $\sqrt{2}$ rasjonal som er en motsigelse.

Dermed må $c = 0$. Så $y = 0$. Da er

$x + y\sqrt{2} = x + 0 \cdot \sqrt{2} = x = 0$.

Så viss $x + \sqrt{2}y = 0$ har vi vist at $x = 0$, $y = 0$.

Motsatt viss vi antar $x = y = 0$ så er $x + y\sqrt{2} = 0$.

ⓑ Vis at viss $z_1, z_2 \in A$ så er $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ $z_2 \neq 0$ også med i A.

Vet at $z_1 = x + y\sqrt{2}$ $z_2 = s + t\sqrt{2}$, $x, y, s, t \in \mathbb{Q}$

$z_1 + z_2 = x + y\sqrt{2} + s + t\sqrt{2} = (x+s) + (y+t)\sqrt{2}$

som er i A siden $x + s \in \mathbb{Q}$ og $y + t \in \mathbb{Q}$

$z_1 z_2 = (x + y\sqrt{2})(s + t\sqrt{2}) = xs + xt\sqrt{2} + ys\sqrt{2} + yt \cdot 2$

$= (xs + 2yt) + (xt + ys)\sqrt{2}$ som er i A

siden $xs + 2yt \in \mathbb{Q}$ og $xt + ys \in \mathbb{Q}$

(bruker at summer og produkter av brøker er igjen brøker)

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + y\sqrt{2}}{s + t\sqrt{2}}$ Triks: Bruk konjugatsetning / 3de kvadratsetning:

$$\frac{(x+y\sqrt{2})}{(s+t\sqrt{2})} \frac{(s-t\sqrt{2})}{(s-t\sqrt{2})} = \frac{xs - xt\sqrt{2} + ys\sqrt{2} - yt \cdot 2}{s^2 - (t\sqrt{2})^2}$$

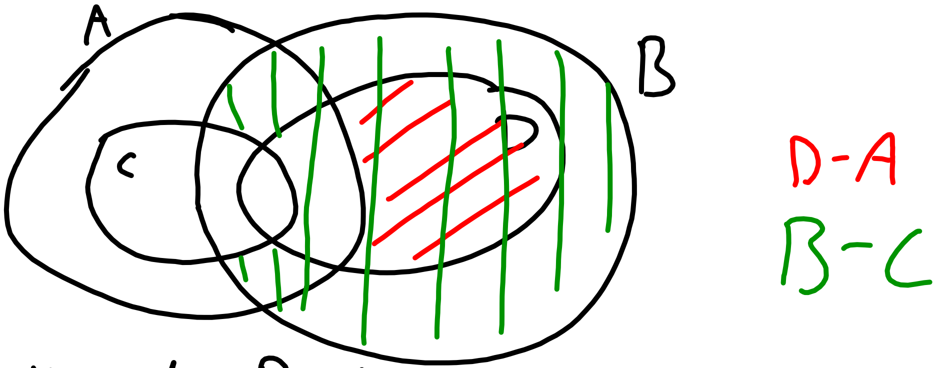
$$= \frac{xs - 2yt + (ys - xt)\sqrt{2}}{s^2 - 2t^2} =$$

$$\left(\frac{xs - 2yt}{s^2 - 2t^2}\right) + \left(\frac{ys - xt}{s^2 - 2t^2}\right)\sqrt{2}$$ som er i A siden

også brøk delt på brøk er en brøk.

Merk: Vi antok $s + t\sqrt{2} \neq 0$ så $s - t\sqrt{2} \neq 0$, så det under brøkstreken er fortsatt ulikt 0.

§4.2 (6) La A, B, C, D være mengder.
Anta $C \subseteq A$ og $D \subseteq B$. Vise at $D - A \subseteq B - C$.



Skal vise at $D - A \subseteq B - C$
Ta vilkårlig $x \in D - A$. Vil vise at $x \in B - C$.
Vet $x \in D$ og $x \notin A$. Vi vet at $D \subseteq B$ så da må $x \in B$.
Vi vet også $C \subseteq A$ som betyr $\forall x \; x \in C \Rightarrow x \in A$
Kontrapositivt betyr også $\forall x \quad x \notin A \Rightarrow x \notin C$.
Så siden $x \notin A$ og $x \notin A \Rightarrow x \notin C$ så er $x \notin C$.
Så $x \in B$ og $x \notin C$ så per definisjonen er $x \in B - C$.
Dermed er $D - A \subseteq B - C$.

15) Hvilke påstander er sanne for alle mengder A?

$\emptyset \subseteq P(A)$ $\quad$ $\emptyset \in P(A)$

$A \subseteq P(A)$ $\quad$ $A \in P(A)$

her er $P(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$

Er $\emptyset \subseteq P(A)$? Det betyr for alle $x \in \emptyset$ må $x \in P(A)$. Siden ingen x ligger i $\emptyset$ er dette sant.

$\emptyset \in P(A)$? Det betyr er $\emptyset$ en delmengde av A? Ja, siden den er en delmengde av enhver mengde. Altså er dette sant.

$A \subseteq P(A)$? Det betyr vil alle $x \in A$ oppfylle $x \in P(A)$? Nei, fordi elementene i $P(A)$ er delmengder og ikke elementer av A.

Eksempel: $A = \{1,2,3\}$ $\quad P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \\ \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \end{array} \right\}$

A er ikke delmengde av $P(A)$ fordi

$$\{1,2,3\} \neq \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$
$$\{1,2,3\} \neq \{\{1,2,3\}\}$$

Er $A \in P(A)$? Det betyr er $A \subseteq A$? Ja, per definisjon av delmengde. Så dette er sant.

§5.1) 2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y)=y$

Vise at $ran(f) = \mathbb{R}$.

Her er $ran(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists (x,z)\ f(x,z) = y \}$

For å vise at to mengder er like, så viser man at de er inneholdt i hverandre, dvs vise $ran(f) \subseteq \mathbb{R}$ og $\mathbb{R} \subseteq ran(f)$.

Per definisjon er $ran(f) \subseteq \mathbb{R}$. Så trenger å vise at $\mathbb{R} \subseteq ran(f)$.

Ta vilkårlig $y \in \mathbb{R}$. Vil vise $y \in ran(f)$.

Må finne (x,z) slik at $f(\cancel{x},z) = y$.

Vi har at for en slik (x,z) må oppfylle

$f(x,z) = z = y$

så ser at z må være lik y.

Ser at også alle valg på formen (x,y) funker $f(x,y)=y$.

Dermed har vi vist at det finnes (x,z) slik at $f(x,z)=y$ så $y \in ran(f)$ og dermed er $\mathbb{R} \subseteq ran(f)$ så $\mathbb{R} = ran(f)$ (fra tidligere).

5) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ partall} \\ n+5 & n \text{ oddetall} \end{cases}$

Vis at $\text{ran}(f) = \mathbb{Z}$.

Som i forrige oppgave er $\text{ran}(f) = \{ m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ f(n) = m \}$ inneholdt i $\mathbb{Z}$. Så vi må vise

$\mathbb{Z} \subseteq \text{ran}(f)$.

Ser at viss n er partall så er $f(n) = n-1$ være et oddetall.
Viss n er oddetall så er $f(n) = n+5$ partal
($n = 2k+1$ er $2k+1+5 = 2k+6 = 2(k+3)$) *

Ta $m \in \mathbb{Z}$. Anta m er partall. Vil finne n slik at $f(n) = m$. Ser ved * at n må være et oddetall. Dermed må n oppfylle $f(n) = n+5 = m$ Så $n = m-5$ må være sant. Og vi ser at

$f(n) = f(m-5) = m-5+5 = m$.

(bruker vi at $m-5$ er oddetall når m er partall)

Anta at m er oddetall. Vil finne n slik at $f(n) = m$. Ser ved * at n må være partall.

Så $f(n) = n-1 = m$

så n må være lik $m+1$. Ser også at

$f(n) = f(m+1) = m+1-1 = m$

(bruker at oddetall $+1$ er partall)

Så alle $m \in \mathbb{Z}$ er med i $\text{ran}(f)$ så $\mathbb{Z} = \text{ran}(f)$.

§5.2) 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 2x & x < 4 \end{cases}$$

Skal finne $f \circ g$, dvs $f(g(x))$.

$$f(g(x)) = f\left(\begin{matrix} x+3 & x \geq 4 \\ 2x & x < 4 \end{matrix} \right)$$

Viss $x \geq 4$: Siden $x \geq 4$ er $x+3 \geq 4+3 = 7 \geq 0$

så da er $f(x+3) = (x+3)^2$

Viss $x < 4$: $g(x) = 2x$ som er $\geq$ viss og bare viss

$x \geq 0$, isåfall er $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

Viss $x < 4$ og $x < 0$ så er $2x < 0$ så $f(2x) = 2x-2$

$$f(g(x)) = \begin{cases} (x+3)^2 & x \geq 4 \\ 4x^2 & 4 > x \geq 0 \\ 2x-2 & 0 > x \end{cases}$$