PLENUM 20.11

§9.2 | 4

Anta $S \subseteq \mathbb{R}$ ikketom og begrensa.

α er nedre begrensning, dvs $\alpha \leq x \quad \forall x \in S$

β er øvre begrensning, dvs $\beta \geq x \quad \forall x \in S$

a) Vise $\beta = \sup S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in S \; (\beta - \varepsilon < x)$

Vise kontrapositivt, dvs

$$\beta \neq \sup S \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in S \; (\beta - \varepsilon \geq x)$$

Anta $\beta \neq \sup S$. Da vil $\beta > \sup S$.

Så $\beta - \sup S > 0$

Da kan vi velge $\varepsilon = \beta - \sup S > 0$, fordi for $x \in S$:

$$\beta - \varepsilon = \beta - (\beta - \sup S) = \sup S \geq x \quad \forall x \in S$$

Motsatt anta finnes $\varepsilon > 0 \; \forall x \in S \; (\beta - \varepsilon \geq x)$

Per antagelse er $\beta - \varepsilon$ en øvre skranke for S.

Og $\beta - \varepsilon < \beta$ siden $\varepsilon > 0$

Dermed kan ikke β være minste øvre skranke.

Så $\beta \neq \sup S$.

b) Vise $\alpha = \inf S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in S \quad x < \alpha + \varepsilon$

Igjen vil heller vise kontrapositivt

$\alpha \neq \inf S \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad x \geq \alpha + \varepsilon$

Anta $\alpha \neq \inf S$. Da må $\alpha < \inf S$.

Så $\inf S - \alpha > 0$

Sett $\varepsilon = \inf S - \alpha$ så ser vi

$\alpha + \varepsilon = \alpha + \inf S - \alpha = \inf S \leq x \quad \forall x \in S$

som var det vi skulle vise.

Motsatt anta finnes $\varepsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad x \geq \alpha + \varepsilon$

Ser at $\alpha + \varepsilon$ er en nedre skranke.

Og $\alpha < \varepsilon + \alpha$ så α kan ikke være største nedre skranke. Altså $\alpha \neq \inf S$.

5) $S \subseteq \mathbb{R}$ ikketom

(a) Vise at viss $\max S$ finnes så er $\sup S = \max S$.
Motsatt viss $\sup S \in S$ så vise at $\sup S = \max S$

Anta $\max S$ finnes, dvs $\max S \in S$ og $\max S \geq x$ $\forall x \in S$

Vet at $\sup S \geq x$ $\forall x \in S$ og
$\sup S$ er minst med denne egenskapen,
dermed er $\sup S \leq \max S$.
$\max S \in S$ så $\sup S \geq \max S$
så $\sup S = \max S$

Motsatt anta $\sup S \in S$. Da er $\sup S \geq x$ $\forall x \in S$
og $\sup S \in S$ så $\sup S = \max S$.

(b) Viss $\min S$ finnes, skal vise $\inf S = \min S$
Motsatt, viss $\inf S \in S$, vise at $\inf S = \min S$.

Anta $\min S$ finnes. Da er
$\min S \leq x$ $\forall x \in S$
Alltid $\inf S \leq x$ $\forall x \in S$ og $\inf S$ er
største tallet med den egenskapen, så
$\inf S \geq \min S$
Men $\min S \in S$ så $\inf S \leq \min S$. Dermed er $\min S = \inf S$

Motsatt om $\inf S \in S$ så er fortsatt $\inf S \leq x$
$\forall x \in S$ og $\inf S \in S$ så $\inf S = \min S$.

b) Vise at alle ikketomme delmengder av reelle tall som har en nedre skranke, må ha infimum.

$\boxed{\text{Vet at viss mengde har øvre skranke, må det ha supremum.}}$ 9.2.9

La $T \subseteq \mathbb{R}$ ikketom som har nedre skranke α

Se på $S = \{-x \mid x \in T\}$

Vet at $\alpha \leq x \ \forall x \in T$ så $-x \leq -\alpha \ \forall x \in T$

så $-\alpha$ øvre skranke for S.

Dermed må S ha supremum β.

<u>Vil vise at $-\beta$ er $\inf T$:</u>

Vet at $\beta \geq -x$, $x \in T$ og minst med den egenskapen

$-\beta \leq x \ \forall x \in T$, og størst med den egenskapen:

Viss $-\beta < \gamma \leq x \ \forall x \in T$ så

$\beta > -\gamma \geq -x \ \forall x \in T$ som motsier at

β er supremum for S.

Dermed er $-\beta = \inf T$

7) $S \subseteq \mathbb{R}$ begrenset og ikketom. $T \subseteq S$ ikketom
Vise at T begrenset og
$$\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$$
La a, b være slik at $a \leq x \leq b \quad \forall x \in S$
siden $T \subseteq S$ vil $a \leq x \leq b \quad \forall x \in T$
så T er begrenset.
Har at $\inf S \leq x \quad \forall x \in S$, og siden $T \subseteq S$ så
$\inf S \leq x \quad \forall x \in T$
$\inf T$ er største tallet med den egenskapen så
$\inf T \geq \inf S$
T er ikketom, så finnes $x \in T$. Da er $\inf T \leq x \leq \sup T$
så $\inf T \leq \sup T$.
Vi har $\sup S \geq x \quad \forall x \in S$, så
$\sup S \geq x \quad \forall x \in T$
$\sup T$ er minste talle med denne egenskapen
så $\sup T \leq \sup S$.

11) $S \subseteq \mathbb{R}$ er et intervall viss S inneholder minst to ulike reelle tall og $\forall x, y \in S$ viss $x<y$ og $x<z<y$ så må $z \in S$. $\ast$

Skal vise S intervall $\Leftrightarrow$ S er en av følgende:

(a,b)
$[a,b]$
$(a,b]$
$[a,b)$
(a,∞)
$[a,\infty)$
$(-\infty,b)$
$(-\infty,b]$

Dersom $\inf S$ og $\sup S$ finnes: $a=\inf S$ $b=\sup S$.

Viss $a\in S$ og $b \in S$ skal vise at $S=[a,b]$:

Ta $x \in S$. Da er $a \le x \le b$ siden $a=\inf S, b=\sup S$ så $x \in [a,b]$, så $S \subseteq [a,b]$

Ta $x \in [a,b]$ så er $a \le x \le b$. Vi har også at $a,b \in S$ så ved $\ast$ så er $x \in S$.

Dermed er $[a,b] \subseteq S$

så $[a,b]=S$.

Viss $a \notin S$ og $b \in S$, skal vise $S=(a,b]$

Ta $x \in S$. $a<x\le b$ så $x \in (a,b]$ så $S \subseteq (a,b]$.

Ta $x \in (a,b]$. Vi kan skrive $x=a+\varepsilon$, der $\varepsilon>0$

ved 9.2.4.b $\exists y \in S$ med $y < a+\varepsilon = x$

Da er $y<x\le b$ og $y,b \in S$ så ved $\ast$ er $x \in S$.

Dermed er $(a,b] \subseteq S$

Dermed er $(a,b]=S$

Viss $a \in S$ og $b \notin S$ så er $S=[a,b)$. Hopper over

Viss $a\notin S$ og $b \notin S$ så er $S=(a,b)$. Hopper over

Viss $\sup S$ ikke finnes og $\inf S = a$ finnes:

Viss $a \in S$ så er $S=[a,\infty)$:

Ta $x \in S$. Da er $a \le x$ så $x \in [a,\infty)$ så $S \subseteq [a,\infty)$

Ta $x \in [a,\infty)$. Da er $a \le x$. Siden $\sup S$ ikke finnes så finnes $y \in S$ med $y>x$.

Da $a \le x < y$ og $a,y \in S$ så ved $\ast$ $x \in S$.

Dermed $[a,\infty) \subseteq S$ så $[a,\infty)=S$

Viss $a \notin S$ så er $S=(a,\infty)$:

Ta $x \in S$. Da er $a<x$ så $x \in (a,\infty)$. så $S \subseteq (a,\infty)$

Ta $x \in (a,\infty)$. Da er $x=a+\varepsilon$ for $\varepsilon>0$. Ved 9.2.4.b finnes $y\in S$ med $y<a+\varepsilon=x$.

Siden $\sup S$ ikke finnes, så finnes $z \in S$ med $z>x$. Da er $y<x<z$ og $y,z \in S$ så $x\in S$.

Dermed $(a,\infty) \subseteq S$ så $(a,\infty)=S$.

Viss $\inf S$ ikke finnes og $b=\sup S$ finnes:

Viss $b \in S$ er $S=(-\infty,b]$. Hopper over

Viss $b \notin S$ er $S=(-\infty,b)$. Hopper over.

§9.3 1) skal vise

$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{Z}^+ \; [n > x]$

$\boxed{\text{Skal bruke Arkimedes prinsipp: } a, b \in \mathbb{R} \text{ og } 0 < a < b \text{ så finnes } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ slik at } na > b}$

Ta $x \in \mathbb{R}$. Enten finnes $m \in \mathbb{Z}^+$ med $m > x$ eller

så er $m \leq x \; \forall m \in \mathbb{Z}^+$. Ta isåfall slik $m \leq x$.

Viss $x \leq 0$ så er vi ferdige fordi $1 > 0 \geq x$.

Så kan anta $x > 0$.

Ved arkimedes prinsipp finnes n slik at $nm > x$.

nm er heltall så påstanden er sann.

(3) For alle $x \in \mathbb{R}^+$ finnes $n \in \mathbb{Z}^+$ med $0 < \frac{1}{n} < x$:

enten er det sant ellers er $x \leq \frac{1}{m}$ for alle $m \in \mathbb{Z}^+$

$0 < x \leq \frac{1}{m}$

Ved Arkimedes prinsipp finnes k slik at

$$xk > \frac{1}{m}$$

Da $x > \frac{1}{km} > 0$ så påstanden er sann. For $n = km$.

2) $S = \{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \}$ Vise $\inf S = 0$ og $\sup S = 1$

$n \geq 1$

$1 \geq \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{n} \geq 0$ så 0 er en nedre skranke så

$\inf S \geq 0$.

$n = 1$ ser at $1 - \frac{1}{1} = 0 \in S$ så $\inf S \leq 0$.

Dermed $\inf S = 0$

$0 < \frac{1}{n}$ $\forall n$ så

$1 < 1 + \frac{1}{n}$ så $1 - \frac{1}{n} < 1$ $\forall n$

så 1 er en øvre skranke, så $\sup S \leq 1$

Anta $\sup S < 1$. Da er $1 - \sup S > 0$ så finnes

$n \in \mathbb{Z}^+$ slik at $1 - \sup S > \frac{1}{n} > 0$ fra 9.3.1

Da er $1 - \frac{1}{n} > \sup S$ som er motsigelse.

Dermed er $\sup S = 1$.

4) For $n \in \mathbb{Z}^+$ la $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ $(a_n < b_n)$

Anta $I_{n+1} \subseteq I_n$ $\forall n$. dvs $a_{n+1} \geq a_n$
$b_{n+1} \leq b_n$

Skal vise $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n \neq \emptyset$

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$

Vi har også at $a_n < b_n$ som medfører $b_1 \geq a_i$ for alle i. Dette medfører at (a_i) har en øvre skranke. Spesielt finnes $\sup a_i = \alpha$.

Da har vi $\alpha \geq a_i$ $\forall i$

Vi har også at $b_j \geq a_i$ for alle j og i.

Så siden α er minste øvre skranke, så $\alpha \leq b_j$ for alle j.

Har vist $a_i \leq \alpha$ $\forall i$, $\alpha \leq b_j$ $\forall j$ så $\alpha \in [a_i, b_i]$ $\forall i$

Så $\alpha \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} [a_i, b_i]$ Så $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n \neq \emptyset$

Kan også vise at $\inf b_i \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n$.