DIREKTE BEVISER

Matematiske udsagn vil ofte være på formen

Hvis P er sand så er Q sand,

hvor P og Q er udsagn.

Vi kan vise dette direkte ved at antage at P er sand og herudfra deducere at Q er sand.

Med andre ord viser vi at $(P \Rightarrow Q)$ er et sandt udsagn.

Herefter kan vi bruge tautologien modus ponens

$$(P \land (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$

til at konkludere, at når P er sand så er også Q sand.

<u>Teorem 1</u> Lad $n, m \in \mathbb{Z}$. Hvis $n \cdot m$ er et partall så er mindst ét af n og m et partall.

<u>Bevis</u> Antag at $n \cdot m$ er et partall. Da findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n \cdot m = 2k$.
Da primtalsfaktoriseringen af ethvert helt tal er unikt følger, at 2 må indgå i primtalsfaktoriseringen af mindst ét af tallene n og m. $\square$

<u>Kontraposition</u>

For udsagn P og Q er $(P \Rightarrow Q)$ og $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ logisk ækvivalente udsagn.

I stedet for at vise $(P \Rightarrow Q)$ kan vi altså vise $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Vi kalder $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ for det kontrapositive udsagn til udsagnet $(P \Rightarrow Q)$.

Et kontrapositionsbevis er et direkte bevis af det kontrapositive udsagn.

<u>Teorem 2</u> Lad $n, m \in \mathbb{Z}$. Hvis både n og m er oddetall er $n \cdot m$ et oddetall.

<u>Bevis</u> Antag at både n og m er oddetall. Skriv $n = 2k+1$ og $m = 2l+1$. Så er

$$n \cdot m = (2k+1) \cdot (2l+1) = 2(2kl + k + l) + 1$$

Altså er $n \cdot m$ et oddetal. $\square$

Udsagnet i Teorem 2 er det kontrapositive til udsagnet i Teorem 1.

Teorem 1 og 2 er altså det samme teorem bare formuleret lidt forskelligt.

Beviset ovenfor er et direkte bevis af Teorem 2 og et kontrapositionsbevis af Teorem 1.

MODSTRIDSBEVISER

Et modstridsbevis er et indirekte bevis som føres via reductio ad absurdum.

Sandheden af et udsagn R vises ved at antage at dets negation $\neg R$ er sand og udlede en modstrid heraf. En modstrid skal her forstås som et udsagn der er åbenlyst forkert. Vi kan da benytte tautologien tertium non datur, $R \vee \neg R$, til at konkludere at R er sand.

For at vise sandheden af udsagnet

Hvis P er sand så er Q sand

antager vi at dets negation er sand. Vi antager altså at P er sand og Q er falsk. Vi skal så benytte disse to antagelser til at udlede en modstrid.

$$\text{"} P \wedge \neg Q \rightsquigarrow \lightning \text{"}$$

En typisk modstrid kan være $0=1$ eller $1<1$.

Teorem 1 Lad $n, m \in \mathbb{Z}$. Hvis $n \cdot m$ er et partall så er mindst ét af n og m et partall.

Bevis Antag for modstrid at $n \cdot m$ er et partall og at n og m begge er oddetall. Vi regner modulo 2:

$$[0]_2 = [n \cdot m]_2 = [n]_2 \cdot [m]_2 = [1]_2 \; \lightning$$

□

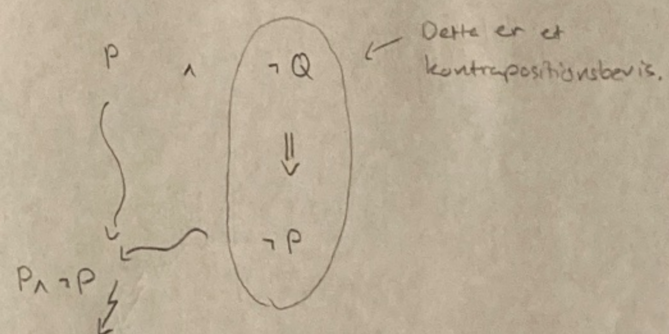
Falsk modstrid

Pas på! Det er let at komme til at formulere et kontrapositionsbevis som om det var et modstridsbevis. Et kontrapositionsbevis som er formuleret som et modstridsbevis kan vi kalde et "falskt modstridsbevis". Det har følgende struktur:

① Antag at P er sand og at Q er sand.

② Vis at $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ er sand.

③ Konkluder at $P \wedge \neg P$ er sand, hvilket er absurd



Bemærk at det falske modstridsbevis indeholder et kontrapositionsbevis (punkt ②).
Modstriden er forceret: den opstår fordi vi har antaget at P er sand, men den antagelse behøver vi ikke at lave.

Falske modstridsbeviser er dårlig stil!