UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1140 — Strukturer og argumenter
Eksamensdag:	Torsdag 14 December, 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen hjelpemidler tillatt.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjennom hele besvarelsen må alle svar begrunnes på en klar og tydelig måte dersom de skal gi uttelling.

Oppgave 1 (vekt 10%)

Vis at

$$((P \implies Q) \land \neg Q) \implies \neg P$$

er en tautologi.

Løsningsforslag: Vi kan lave en sannhetstabelle eller argumentere på følgende måte. Når Q er sant, så er konjunksjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q)$$

usant og implikasjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q) \implies \neg P$$

er sant uanset sannhetsverdien av P. Når Q er usant, så har vi to muligheter: Utsagn P kan være sant som medfører at konjunksjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q)$$

er usant fordi implikasjonen $P \implies Q$ er usant. I denne tilfald er implikasjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q) \implies \neg P$$

sant. Utsagn P kan også være usant som medfører at konjunksjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q)$$

er sant (husk at vi anta at Q er usant!). Så følger det at implikasjonen

$$((P \implies Q) \land \neg Q) \implies \neg P$$

er sant fordi utsagn på begge sider er sant.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 20%)

La A, B og C være mengder.

2a (vekt 10%)

Vis at

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C.$$

Løsningsforslag: La oss anta at $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Det betyder at $x \in A$ og $x \notin B \setminus C$. Hvis $x \in C$ så er $x \in (A \setminus B) \cup C$. Hvis $x \notin C$ og $x \notin B \setminus C$ så følger det at $x \notin B$. Vi konkluderer at $x \in A \setminus B$ og derfor $x \in (A \setminus B) \cup C$.

2b (vekt 10%)

Har vi nødvendigvis at

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C \quad ?$$

Hvis svaret ditt er ja, vis det. Hvis svaret ditt er nei, finn et moteksempel.

Løsningsforslag: Likheten er ikke altid sant. Hvis vi ta $A = B = \{1\}$ og $C = \{2\}$, så er

$$A \setminus (B \setminus C) = \emptyset,$$

men

$$(A \setminus B) \cup C = \{2\} \neq \emptyset.$$

Oppgave 3 (vekt 10%)

La $\leq$ være en ordensrelasjon på en mengde A. Vi definerer en relasjon $\sim$ på A ved at $x \sim y$ hvis og bare hvis $x \leq y$ eller $y \leq x$. Har vi nødvendigvis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon? Hvis svaret ditt er ja, vis det. Hvis svaret ditt er nei, finn et moteksempel.

Løsningsforslag: Relasjonen $\sim$ er ikke altid en ekvivalensrelasjon. La oss anta en ordensrelasjon $\leq$ på mengden $M = \{0, 1, 2\}$ slik at

$$0 \leq 0, 1 \leq 1, 2 \leq 2, 0 \leq 1, 0 \leq 2.$$

Det er en ordensrelasjon fordi den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv. Relasjonen $\sim$ på M er slik at

$$0 \sim 0, 1 \sim 1, 2 \sim 2, 0 \sim 1, 0 \sim 2.$$

Men det er ikke en ekvivalensrelasjon fordi den ikke er transitiv ($1 \nsim 2$).

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 (vekt 30%)

La $\sim_B$ være en ekvivalensrelasjon på en mengde B og $f : A \to B$ en funksjon fra A til B. Vi definerer en relasjon $\sim_A$ på A ved at sætte $x \sim_A y$ for $x, y \in A$ hvis og bare hvis $f(x) \sim_B f(y)$.

4a (vekt 10%)

Vis at $\sim_A$ er en ekvivalensrelasjon på A.

Løsningsforslag: La oss sjekke at relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv. For hvert $x \in A$ har vi $f(x) \sim_B f(x)$ fordi $\sim_B$ er refleksiv som en ekvivalensrelasjon. Dermed har vi $x \sim_A x$ for hvert $x \in A$ og relasjonen $\sim_A$ er refleksiv. For hvert $x, y \in A$ slik at $x \sim_A y$ har vi $f(x) \sim_B f(y)$ og også $f(y) \sim_B f(x)$ fordi $\sim_B$ er symmetrisk som en ekvivalensrelasjon. Dermed har vi også $y \sim_A x$ og vi konkluderer at relasjonen $\sim_A$ er symmetrisk. La oss anta at $x, y, z \in A$ er slik at $x \sim_A y$ og $y \sim_A z$. Så er $f(x) \sim_B f(y)$ og $f(y) \sim_B f(z)$ og fordi $\sim_B$ er transitiv som en ekvivalensrelasjon har vi at $f(x) \sim_B f(z)$ og dermed $x \sim_A z$. Det viser at relasjonen $\sim_A$ er transitiv, og i alt har vi vist at den er en ekvivalensrelasjon.

4b (vekt 10%)

La oss definere en funksjon $F : A/\sim_A \to B/\sim_B$ ved

$$F([x]_{\sim_A}) = [f(x)]_{\sim_B},$$

for alle $x \in A$. Vis at F er veldefinert og injektiv.

Løsningsforslag: Først viser vi at funksjonen $F : A/\sim_A \to B/\sim_B$ er veldefinert. La $x, y \in A$ være slik at $x \sim_A y$. Så er $f(x) \sim_B f(y)$ og det betyder at

$$[f(x)]_{\sim_B} = [f(y)]_{\sim_B}.$$

Dermed er $F : A/\sim_A \to B/\sim_B$ veldefinert fordi verdierne ikke avhenger av hvilke representantanter er valgt for argumenterne i $A/\sim_A$.

La nu $x, y \in A$ være slik at

$$F([x]_{\sim_A}) = F([y]_{\sim_A}).$$

Det betyder at

$$[f(x)]_{\sim_B} = [f(y)]_{\sim_B}.$$

og at $f(x) \sim_B f(y)$. Men så er $x \sim_A y$ og vi konkluderer at $[x]_{\sim_A} = [y]_{\sim_A}$. Det viser at funksjonen F er injektiv.

4c (vekt 10%)

Er det alltid sant at F er surjektiv? Hvis svaret ditt er ja, vis det. Hvis svaret ditt er nei, finn et moteksempel.

(Fortsettes på side 4.)

Løsningsforslag: Funksjonen $F : A/\sim_A \to B/\sim_B$ er ikke altid surjektiv. For eksempel kan vi ta $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$ og ekvivalensrelasjonen $\sim_B$ kan vi valge som likhetsrelasjonen, dvs., vi har $0 \sim_B 0$, $1 \sim_B 1$, men $0 \nsim_B 1$. Så er $[0]_{\sim_B} = \{0\}$, $[1]_{\sim_B} = \{1\}$ og

$$B/\sim_B = \left\{[0]_{\sim_B}, [1]_{\sim_B}\right\}.$$

La $f : A \to B$ være definert som $f(x) = 0$ for alle $x \in A$. Så er $x \sim_A y$ hvis $0 = f(x) = f(y) = 0$ og det holder for alle $x, y \in A$. Vi konkluderer at $[0]_{\sim_A} = [1]_{\sim_A} = \{0, 1\}$, og vi har

$$A/\sim_A = \left\{[0]_{\sim_A}\right\}.$$

Nu kan vi se at

$$F([0]_{\sim_A}) = [f(0)]_{\sim_B} = [0]_{\sim_B},$$

og at $[1]_{\sim_B}$ er ikke i verdimengden av F. Det viser at F er ikke surjektiv.

Oppgave 5 (vekt 20%)

La $A = [0, 1]$ og $B = (0, 1]$ være intervaller i $\mathbb{R}$.

5a (vekt 10%)

Finn en injektiv funksjon $f : A \to B$.

Løsningsforslag: Der er mange muligheter for slike funksjoner. En eksempel er $f : A \to B$ definert som

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Den er definert på hele mengden A og naturligvis en funksjon. Hvis $x, y \in A$ er slik at

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} = f(y),$$

så er $x/2 = y/2$ og dermed $x = y$. Derfor er funksjonen injektiv.

5b (vekt 10%)

Finnes det en bijektiv funksjon $g : A \to B$? Begrunn svaret ditt.

Løsningsforslag: Der finnes en bijektiv funksjon $g : A \to B$. I 5a har vi funnet en injektiv funksjon $f : A \to B$. Det er også klart at der finnes en injektiv funksjon $h : B \to A$, for eksempel den kanoniske inklusjon definert som $h(x) = x$ for alle $x \in B$. Teoremet fra Cantor-Bernstein-Schröder viser så at der finnes en bijektiv funksjon $g : A \to B$.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 6 (vekt 10%)

La $N \in \mathbb{N}$ være et tall på desimalform $xyzxyz$ med siffre $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eksempler på slike tall er 123123 og 298298, men også 087087 som vi vil tolke som 87087. Vis at ethvert tall på denne formen er delbart med 13.

Løsningsforslag: Der er (minst) to muligheter for at løse denne oppgave. Først kan vi set at hvert tall N på slike form kan skrives som

$$N = x10^5 + y10^4 + z10^3 + x10^2 + y10^1 + z10^0.$$

Vi kan regne ut at $10^2 \equiv 9 \bmod 13$, $10^3 \equiv 12 \bmod 13$, $10^4 \equiv 3 \bmod 13$, og $10^5 \equiv 4 \bmod 13$. Vi konkluderer at

$$N \equiv 4x + 3y + 12z + 9x + 10y + z \equiv 13(x + y + z) \equiv 0 \bmod 13.$$

Det viser at N er delbart med 13.
Alternativt og måske hurtiger, kan vi regne ut at $1001 = 77 \cdot 13$. Dermed er $10010 = 770 \cdot 13$ og $100100 = 7700 \cdot 13$. Vi konkluderer at

$$N = 100100 \cdot x + 10010 \cdot y + 1001 \cdot y = (7700 + 770 + 77) \cdot 13,$$

er delbart med 13.