UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1140 — Training oppgave
Eksamensdag:	...
Tid for eksamen:	... – ...
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La P, Q og R være utsagn. Avgjør om

$$((P \implies Q) \implies (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$$

er en tautologi.

Oppgave 2

La A, B og C være mengder. Har vi nødvendigvis at

$$((A \subseteq B \setminus C) \wedge (B \subseteq C \setminus A)) \implies B = \emptyset?$$

Oppgave 3

La A, B og C være mengder. Vis at man ikke kan ha

$$(A \subsetneq B) \wedge (B \subsetneq C) \wedge (C \subsetneq A).$$

Oppgave 4

Finn alle løsninger $x \in \mathbb{Z}$ til likningen

$$45x \equiv 30 \bmod 105.$$

Oppgave 5

La $n \in \mathbb{Z}$ være et oddetall. Vis at n og $n + 2$ er innbyrdes primiske.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 6

La $f : A \to B$ være en injektiv funksjon og anta at vi er gitt en ordensrelasjon $\leq_B$ på B. På A definerer vi en relasjon $\leq_A$ ved

$$x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

6a

Vis at $\leq_A$ er en ordensrelasjon på A.

6b

Vis at om $\leq_B$ er en velorden, så er $\leq_A$ en velorden. Er det nødvendigvis slik at dersom $\leq_A$ er en velorden, så er $\leq_B$ en velorden?

Oppgave 7

Vis at 7 deler $3^{105} + 4^{105}$.

Oppgave 8

La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen på $\mathbb{Q}$ slik at $x \sim y$ hvis og kun hvis $xy = 1$.

8a

Definere en operasjon $+$ på kvotienten $\mathbb{Q}/\sim$ ved at definere

$$[x] + [y] = [x + y]\,.$$

Vis at operasjonen $+$ er veldefinert.

8b

Vis at der finnes et nøytralt element i $(\mathbb{Q}/\sim, +)$ og at hvert element $x \in \mathbb{Q}/\sim$ har et inverse til $+$.

Oppgave 9

La $M = \{2^{-m} + n^{-1} \ : \ n, m \in \mathbb{N}\}$ være en delmengde av $\mathbb{R}$. Finnes der $\sup(M), \inf(M), \max(M), \min(M)$ og hvis de finnes hva er de?

Oppgave 10

La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en funksjon slik at $f(n) \leq f(m)$ gjelder når $n \leq m$ for $n, m \in \mathbb{N}$.

(Fortsettes på side 3.)

10a

Vis at dersom $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ så er $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

10b

Anta nu at $f(n) < f(m)$ når $n < m$ for $n, m \in \mathbb{N}$ og la $A = f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ være verdimengden av f. Vis at f er injektiv og at venstre-inversen $g : A \to \mathbb{N}$ er slik at $g(n) < g(m)$ når $n \leq m$ for $n, m \in A$.

10c

Definerer en følge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ved $x_k = f(k)$. Bevis ved induksjon at for hvert $n \in \mathbb{N}$ der finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $x_k > n$.

Oppgave 11

La A og B være mengder og la $f : A \to B$ være en funksjon. Vi anta at vi ha en ekvivalensrelasjon $\sim$ på B. Vi definerer en relasjon $\approx$ på A ved å kreve at for alle $x, y \in A$ vi ha

$$x \approx y \iff f(x) \sim f(y).$$

Vis at $\approx$ er en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 12

På $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ definerer vi en operasjon $\star$ ved

$$(x, s) \star (y, t) = (x + sy, st),$$

for alle $(x, s), (y, t) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$.

12a

Sjekk at denne operasjon er assosiativ men ikke kommutativ.

12b

Sjekk at denne operasjonen har et nøytralt element og at alle elementer i $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ er invertibel.

Oppgave 13

Vis at $\sqrt{15}$ er irrasjonal.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 14

La C være en mengde og $A, B \in \mathcal{P}(C)$. Vis at

$$A \cap ((C \setminus A) \cap (C \setminus B)) = A \cap B.$$

Oppgave 15

Vi anta at vi har definert mengder E_k for hver $k \in \mathbb{N}$ slik at $E_0 = \emptyset$ og for hvert $k \in \mathbb{N}$ er $E_{k+1} = E_k \cup \{E_k\}$.

15a

Vis ved induksjon at for alle $k \in \mathbb{N}$ hvis $x \in E_k$ så er $x \subseteq E_k$.

15b

Vis ved induksjon at for alle $k \in \mathbb{N}$ vi har $E_k \neq E_{k+1}$. Hva er kardinaliteten til E_k?

Oppgave 16

For hvert av følgende utsagn finne ut om den er sant eller usant. Bevis din svar.

16a

La $a, b, c \in \mathbb{N}$. Hvis a deler c og b deler c så deler ab også c. Let $a, b, c \in \mathbb{N}$.

16b

Hvert velorden er en totalt orden.

16c

Hvis $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er funksjonen $f(z) = z^2$, så er alle primtall i verdimengden $f(\mathbb{N})$ større enn 5.

16d

Hvis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$ så konvergerer følgen $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{Q}$.

16e

Hvis A og B er mengder og $\emptyset \in A$ så er $\emptyset \subseteq A \cap B$.

(Fortsettes på side 5.)

16f

Hvis A og B er mengder og $\emptyset \in A$ så er $\emptyset \in A \cap B$.

16g

Hvis A og B er mengder slik at $A \cup B = A \cap B$ så er $A = B$.

Oppgave 17

Vis at hvert ikke-tomme delmengde av $\mathbb{N}$ som har en øvre skranke har et maksimalt element.

Oppgave 18

For mengder A og B la $f : A \to B$ være en funksjon. For hvert delmengde $S \subseteq B$ definerer vi inversbilet som

$$f^{-1}(S) = \{a \in A \ : \ f(a) \in S\}\,.$$

18a

For $S_1, S_2 \subseteq B$ vis at

$$f^{-1}(S_1 \cap S_2) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2).$$

18b

For $S_1, S_2 \subseteq B$ vis at

$$f^{-1}(S_1 \cup S_2) = f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2).$$

Oppgave 19

For mengder A og B la $f : A \to B$ være en funksjon. For hvert delmengde $S \subseteq A$ definerer vi direktbilet som

$$f(S) = \{b \in B \ : \ \text{der finnes } a \in S \text{ slik at } f(a) = b\}\,.$$

19a

For $S_1, S_2 \subseteq A$ vis at

$$f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2).$$

(Fortsettes på side 6.)

19b

For $S_1, S_2 \subseteq A$ vis at

$$f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2).$$

19c

Har vi også

$$f(S_1 \cap S_2) \supseteq f(S_1) \cap f(S_2).$$

for alle $S_1, S_2 \subseteq A$. Begrunn din svar.

Oppgave 20

La $\preccurlyeq$ være en relasjon på $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$ definert som følger. La $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ og $n = q_1 q_2 \cdots q_l$ være primtallsfaktoriseringer av henholdsvis m og n, der $p_j \leq p_{j+1}$ og $q_j \leq q_{j+1}$. Vi sier at $m \preccurlyeq n$ dersom $k \leq l$ og $p_j = q_j$ for alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

20a

Vis at $\preccurlyeq$ er en ordensrelasjon på A.

20b

Er $\preccurlyeq$ en velorden?

20c

Vis at hvert ikke-tom delmengde av A har et minimalt element ved hensyn på orden $\preccurlyeq$.

Oppgave 21

La A være en ikke-tom totalt ordnet mengde som ikke har noe mindste element. Vis at der finnes en funksjon $f : \mathbb{N} \to A$ slik at $f(n+1) < f(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.