OPPGAVER: UKE 10

Cauchyfølger og konvergens

La $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{R}$.

- ◇ Vi siger at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer* mot $a \in \mathbb{R}$ hvis der for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.
- ◇ Vi siger at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en *Cauchyfølge* hvis der for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a_m| < \varepsilon$ for alle $n, m \geq N$.

Oppgave 1. La $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ være en Cauchyfølge i $\mathbb{R}$ og anta at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ikke er en nulfølge. Vis at det finnes et $\delta > 0$ og et $N \in \mathbb{N}$ slik at det enten gælder at $a_n > \delta$, for alle $n \geq N$, eller at $a_n < -\delta$, for alle $n \geq N$.

Oppgave 2 (Klemmelemma)**.** La $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være følger i $\mathbb{R}$ slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at hvis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begge konvergerer til det samme tal $x \in \mathbb{R}$, så konvergerer også $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ til x.

Oppgave 3. Lad $0 < a < 1$ være et reellt tal. For hvert $N \in \mathbb{N}^*$, la

$$x_N = \sum_{k=0}^{N} a^k.$$

(a) Vis at følgen $(a^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ konvergerer mot 0.

(b) Vis at $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ er en Cauchyfølge.

(c) Vis at $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer og udregn dens grense.

Decimalekspansjon

Oppgave 4. La $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ være en følge i $\mathbb{N}$ slik at $0 \leq a_k \leq 9$, for alle $k \in \mathbb{N}^*$, og slik at ikke alle a_k er lik 0. For hvert $N \in \mathbb{N}^*$, la

$$x_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}.$$

Da er $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ en følge i $\mathbb{Q}$.

(a) Vis at hvert x_N opfylder at $0 < x_N \leq 1$.

(b) Vis at $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ er en Cauchy-følge.

La $x \in (0, 1]$ være det reelle tal som følgen $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ representerer. Bemærk at hvis vi betragter $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ som en følge er $\mathbb{R}$ (i stedet for i $\mathbb{Q}$) så er det en konvergent følge og x er dens grænse. Vi skriver

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Denne "uendelige sum" kalles en *decimalekspansjon* av x. Vi kan også skrive decimalekspansjonen av x således:

$$x = 0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$$

Denne skrivemåte er mindre præcis end den forrige, men den appellerer måske mere direkte til vores intuisjon.

Oppgave 5 (Eksistens av decimalekspansjon)**.** Vi ska nu vise at alle reelle tal $x \in (0,1]$ tillater en decimalekspansjon.

(a) For et vilkårligt reelt tall $y \in \mathbb{R}$, argumenter for at intervallet $[y-1, y)$ indeholder et unikt helt tall $a \in \mathbb{Z}$.

(b) La $x \in (0,1]$ være givet. Konstruer rekursivt en følge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{N}$ slik at $0 \leq a_k \leq 9$, for alle $k \in \mathbb{N}^*$, og slik at

$$x - \frac{1}{10^N} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k} < x,$$

for hvert $N \in \mathbb{N}^*$.

(c) Med følgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ konstrueret i den forrige delopgave, vis at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ er en decimalekspansjon for x.

Oppgave 6 (Unikhet av decimalekspansjon)**.** I denne opgave ska vi undersøke unikhet av decimalekspansjonen av et tal $x \in (0,1]$. Vi siger at en decimalekspansjon $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ *terminerer* hvis der finnes et $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_k = 0$, for alle $k \geq N$.

(a) La $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ være den konstante følge $a_k = 9$, for alle $k \in \mathbb{N}^*$. Vis at da er $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ decimalekspansjonen for 1. Med andre ord, vis at $0.999999999\ldots = 1$.

(b) Demonstrer at $\frac{1}{4}$ har mindst 2 decimalekspansjoner.

(c) La $x \in (0,1]$ og anta at x tillater en decimalekspansjon der terminerer. Vis at x *ikke* har en unik decimalekspansjon.

(d) Vis at hvert $x \in (0,1]$ har en unik ikke-terminerende decimalekspansjon.

Oppgave 7 (Decimalekspansjon av tal i $\mathbb{Q}$)**.** Vi ska nu kigge nærmere på decimalekspansjon av rasjonale tall. Vi siger at en decimalekspansion $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ er *periodisk* med periode $s \in \mathbb{N}^*$ hvis der finnes et $k_0 \in \mathbb{N}$ sådan at $a_{k+s} = a_k$, for alle $k \geq k_0$.

(a) Anta at $x \in (0,1]$ har en periodisk decimalekspansjon. Vis at x er rasjonal.

(b) La $p, q \in \mathbb{N}^*$ med $p \leq q$ slik at $\frac{p}{q}$ er et rasjonalt tal i intervallet $(0,1]$. Vis at decimalekspansjonen for $\frac{p}{q}$ er periodisk.