OPPGAVER: UKE 11

Oppgave 1. For hvert $n \in \mathbb{N}$, la

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad \text{og} \qquad b_n = \sqrt[n]{n}.$$

(i) Vis at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot 0.
(ii) Vis at $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot 1.

Oppgave 2. La $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{R}$ og anta at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er

(i) *monotont voksende*, dvs. for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $a_n \leq a_{n+1}$, og
(ii) *opadtil begrenset*, dvs. der finnes et $C \in \mathbb{R}$ slik at $a_n \leq C$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vis at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer.

Oppgave 3. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $a, b > 0$. Vi definerer den *aritmetiske*, den *geometriske* og den *harmoniske middel* av a og $b$således:

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) = \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

(a) Vis at

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b).$$

Vis også at det kun er likhet når $a = b$.

Anta nu at $0 < a < b$. Vi definerer rekursivt to følger $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ således: Sæt $a_1 = a$ og $b_1 = b$. Videre, for $n \in \mathbb{N}^*$, sæt

$$a_{n+1} = H(a_n, b_n), \qquad \text{og} \qquad b_{n+1} = A(a_n, b_n)$$

(b) Vis at $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ er en strengt voksende følge og at $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ er en strengt avtagende følge. Specielt er da

$$[a_1, b_1] \supsetneq [a_2, b_2] \supsetneq \cdots \supsetneq [a_n, b_n] \supsetneq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supsetneq \cdots$$

(c) Vis at der for hvert $\delta > 0$ findes et $n \in \mathbb{N}^*$ slik at $b_n - a_n < \delta$.

(d) Vis at

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a_n, b_n] = \left\{ \sqrt{ab} \right\}$$