OPPGAVER: UKE 12

Partielt ordnede mengder

En *partiel orden* på en mengde A er en relasjon $\leq$ på A som er

Refleksiv: $a \leq a$, for alle $a \in A$.
Antisymmetrisk: Hvis $a \leq b$ og $b \leq a$ så er $a = b$.
Transitiv: Hvis $a \leq b$ og $b \leq c$ så er $a \leq c$.

Hvis $\leq$ er en partiel orden på A siger vi at $(A, \leq)$ er en *partielt ordnet mengde.*

Eksempler på partielt ordnede mengder:

- ◇ For en mengde X, la $\mathcal{P}(X)$ være potensmengden av X og la $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ være en givet familie av delmengder av X. Så er $(\mathcal{C}, \subseteq)$ en partielt ordnet mengde, hvor $\subseteq$ er den normale mengdeinklusion.
- ◇ For $n, m \in \mathbb{N}$ skriver vi $n|m$ hvis n er en divisor i m. For hver delmengde $A \subset \mathbb{N}$ er $(A, |)$ er en partielt ordnet mengde.

Oppgave 1 (Ordensisomorfier)**.** To partielt ordnede mengder $(A, \leq_A)$ og $(B, \leq_B)$ er *ordensisomorfe* hvis der findes en bijektiv avbildning $\Phi : A \to B$ sådan at $a \leq_A b$ hvis og kun hvis $\Phi(a) \leq_B \Phi(b)$, for alle $a, b \in A$.

La $\mathbb{N}^*_{\mathrm{SF}}$ være mengden av alle kvadratfrie positive hele tall og la $\mathbb{N}_{\mathrm{Prim}}$ være mengden av alle primtall.

(a) Vis, at $(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$, $(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}_{\mathrm{Prim}}), \subseteq)$ og $(\mathbb{N}^*_{\mathrm{SF}}, |)$ er ordensisomorfe.
(b) Vis, at $(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$ og $(\mathbb{N}^*, |)$ *ikke* er ordensisomorfe.

Oppgave 2 (Maksimum vs. maksimal)**.** La $(A, \leq)$ være en partielt ordnet mengde.

- ◇ Et element $m \in A$ er *maksimalt* hvis $m \leq a$, for $a \in A$, implicerer at $a = m$.
- ◇ Et element $M \in A$ er et *maksimum* hvis $a \leq M$, for alle $a \in A$.

(a) Betragt følgende mengde partielt ordnet med inklusion.

$$\big\{\{o\}, \{r\}, \{d\}, \{e\}, \{n\}, \{r, o\}, \{r, e, n\}, \{r, o, d\}, \{n, e, d\}, \{n, o, r, d\}\big\}$$

Afgør hvilke elementer i mengden som er maksimale. Har mengden et maksimum?

(b) Vis at hvis $(A, \leq)$ har et maksimum så er det unikt.
(c) Vis at hvis $\leq$ er en total orden på A og $m \in A$ er et maksimalt element, så er m et maksimum for $(A, \leq)$.

Chains og øvre grenser

La $(X, \leq)$ være en partielt ordnet mengde. Givet $x, y \in X$ skriver vi at $x < y$ hvis $x \leq y$ og $x \neq y$. En *øvre grense* til en delmengde $C \subseteq X$ er et element $y \in X$ slik at $x \leq y$, for alle $x \in X$. En *streng øvre grense* til en delmengde $C \subseteq X$ er et element $y \in X$ slik at $x < y$, for alle $x \in X$. En delmengde $C \subseteq X$ som er totalt ordnet kaldes en *chain* i X.

Husk følgende ekvivalente utsagn fra forelæsningerne:

Axiom of choice: For enhver mengde X finnes en funksjon $f : X \to \bigcup X$ slik at $f(x) \in x$.
Zorn's lemma: La $(X, \leq)$ være en partielt ordnet mengde slik at enhver chain i X har en øvre grense i X. Så har X ét maksimalt element.

Oppgave 3. Et *gitter* er en partielt ordnet mengde $(L, \leq)$ slik at for ethvert par av elementer $a, b \in L$ så har $\{a, b\}$ en mindste øvre grense og en største nedre grense. La $(L, \leq)$ være et gitter slik at enhver chain i L har en øvre grense. Vis at L har et maksimum.

Oppgave 4. La A og B være mengder. Vis at det finnes en injeksjon enten fra A til B eller fra B til A.

Hint: La $\mathcal{I}$ være mengden av alle injektioner fra A til B og definer en passende ordensrelasjon på $\mathcal{I}$.

Oppgave 5. Anta at hver chain i X har en streng øvre grense.

(a) For hver chain C i X, argumenter for at der finnes en ikke-tom mengde U_C slik at enhver streng øvre grense til C er et element i U_C og slik at U_C ikke har andre elementer.

(b) Argumenter for at der finnes en ikke-tom mengde Y slik at $C \times U_C$ er et element i Y, for hver chain $C \subseteq X$, og slik at Y ikke har andre elementer.

(c) Vis at der finnes en funktion

$$f : \{C \subseteq X : C \text{ er en chain i } X\} \to X$$

slik at $f(C)$ er en streng øvre grense for C.

Oppgave 6. La X være en mengde og la $\mathcal{F}$ være mengden av "partielt definerede choice-funksjoner". Precist er $\mathcal{F}$ mengden

$$\mathcal{F} = \left\{ h : A_h \to \bigcup X : A_h \subseteq X \text{ og } f(x) \in x \text{ for alle } x \in A \right\}.$$

Vi siger at $h \preccurlyeq g$, for $h, g \in \mathcal{F}$ hvis $A_h \subseteq A_g$ og $h(x) = g(x)$, for alle $x \in A_h$.

(a) Vis at enhver chain i $\mathcal{F}$ har en øvre grense.

(b) Vis at axiom of choice følger av Zorn's lemma.