OPPGAVER: UKE 13

Oppgave 1.

(1) Vis at mengden $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ er tellbar.
(2) Vis at mengder $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$ er ekvipotent, dvs. der finnes en bijeksjon $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Oppgave 2. La A og B være mengder. Vi sier at B har en større kardinalitet enn A hvis der finnes en injeksjon $f : A \to B$. Vi skriver $A \precsim B$ hvis B har større kardinalitet enn A.

(1) Vis at for hvert mengde A vi har $A \precsim A$.
(2) Vis at for mengder A, B og C slik at $A \precsim B$ og $B \precsim C$ vi har $A \precsim C$.

Oppgave 3. La $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ være en familie av delmengder av de naturlige tall $\mathbb{N}$. Det betyder bare at $\mathcal{S}$ er en mengde med elementer som er delmengder av $\mathbb{N}$.

(1) Vis at $\mathcal{S}$ er tellbar dersom vi har $A \cap B = \emptyset$ for alle $A, B \in \mathcal{S}$ med $A \neq B$.
(2) Vis at $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ er ikke tellbar. (Husk at der finnes en bijeksjon mellom $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ og $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$).
(3) Anta nu at snittet $A \cap B$ endelig for alle $A, B \in \mathcal{S}$ med $A \neq B$. Er det muligt at $\mathcal{S}$ er ikke tellbar?

Oppgave 4. La oss definere en relasjon på mengden av alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vi skriver $f \leq^* g$ for functions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hvis der finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $f(n) \leq g(n)$ for alle $n \geq N$.

(1) Vis at $\leq^*$ er en ordensrelasjon på mengden $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ av alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(2) La $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge av funksjoner i $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Vis at der finnes en funksjon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at $f_n \leq^* f$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 5. Oh nej, en diabolisk matematikprofessor har fanget alle julenisser og nu skal de spille et merkligt spil for at slippe fri. Kan du hjelpe dem og redde julen?

(1) La $N \in \mathbb{N}$ og anta at der er N julenisser som har numre $1, 2, \ldots, N$. Matematikprofessoren har givet dem røde og sorte huer på (helt tilfeldig) og han har stilt nisserne opp i en rekke slik at nissen $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ kan se huerne på alle nisser med tall $m > n$ men ikke sin egen. Nu begynner matematikprofessoren at spørge hver nisse en efter en i rekkefølge efter sin egen huefarve. Hvis en nisse svarer korrekt så slipper den fri, men hvis den svarer forkert så bliver den spist av den onde matematikprofessor. Nisserne er kloge og de kan høre hva deres kammerater bag sig sier når de bliver spurgt efter huefarven. Kan du hjelpe dem til at finne en strategi så at maksimalt én nisse blir spist?
(2) Situasjonen er eskalert! Der er uendelig mange nisser nu; én for hvert naturlige tall $n \in \mathbb{N}$. Matematikprofessoren har fanget dem og han har satt ørepropper i deres ører så de kan ikke kan høre mere. Han spiller igjen sit diaboliske spill: Han har stilt dem opp i en rekke og han har satt røde og sorte huer på deres hoveder (helt tilfeldig). Nisserne kender deres eget nummer og da nisser som bekendt har gode øjne kan de se huefarven på alle nisser med strengt større nummer end dem selv. Nu spør han igjen nisserne i rekkefølge om deres huefarve. Hvis de svarer rigtigt slipper de fri, men hvis de svarer forkert så bliver de spist. Kan du hjelpe nisserne til at finne en strategi slik at kun endelig mange av dem blir spist av den onde matematikprofessor?