OPPGAVER: UKE 3

Finne fejl

Oppgave 1. La oss vise at $\frac{d}{dx}x^n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi gjør det med fullstendig induksjon: Grunntilfellet er $n = 0$ og det er klart at

$$\frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0.$$

La oss anta at $\frac{d}{dx}x^k = 0$ for alle $k \leq n$ for $n \in \mathbb{N}$. Så kan vi bruke produktregel fra differensjalregning for at regne ut at

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x^1) = x^n \left(\frac{d}{dx}x^1\right) + \left(\frac{d}{dx}x^n\right) x^1 = x^n \cdot 0 + 0 \cdot x^1 = 0.$$

Med fullstendig induksjon finner vi at $\frac{d}{dx}x^n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Selvfølgelig er det forkert, men hvor er fejlen?

Logikk

Oppgave 2. La P, Q, R være utsagn. Hvilke av de følgende utsagn er tautologier:

(1) $((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$.
(2) $(P \implies (P \implies Q)) \iff (P \implies Q)$.
(3) $(P \wedge Q) \implies (P \vee Q)$.
(4) $(P \vee Q) \implies (P \wedge Q)$.

Oppgave 3. Hvilken av de følgende er utsagn og hvilke av dem er sant:

(1) $3 > 2$.
(2) $x >!$.
(3) $(1 + 3 = 5) \implies (1 = 1)$.
(4) $(1 + 3 = 5) \implies (1 = 0)$.
(5) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$.
(6) Alle primtall er større enn 1.
(7) Uff, oppgaverne er vanskelige.
(8) Dette setning er ikke sant.

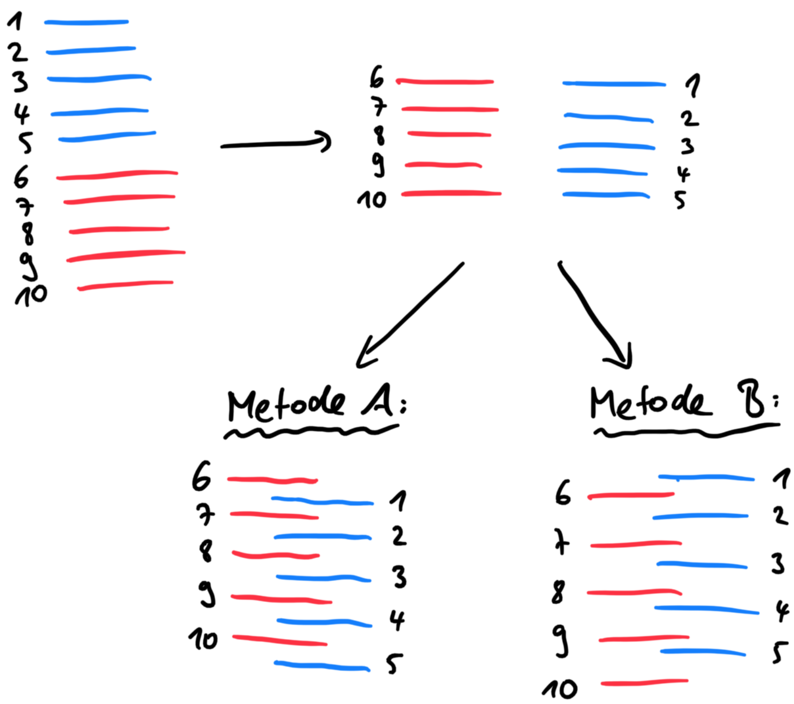
Modulare aritmetik og lidt induksjon

Oppgave 4.

(1) For $n = 2^{20} + 1$ regne ut 2^{n-1} modulo n. Kan vi konkludere fra svaret om n er et primtall eller ikke?
(2) For $n = 2^{16} + 1$ regne ut 2^{n-1} modulo n. Kan vi konkludere fra svaret om n er et primtall eller ikke?

Oppgave 5. Vis at 3^{n+1} er en faktor av $2^{3^n} + 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 6. Anta at $N \in \mathbb{N}$ er et partall og ikke 0. Vi blander en kortstokk med N kort på følgende måte: Vi deler kortstokken i to precis like store dele og blander de to dele således at kortstokken efter blandingen har skiftevis et kort fra den ene del og et kort fra den annen del. Der er to muligheter for at gjøre denne blandingsmetode avhengig om hvor den første kort lander efter blanding. La oss kalle metode A den metode hvor første kort skifter til annen plads, og metode B hvor første kort forbliver den første kort. Se Figur på annen side for en illustrasjon.



FIGUR 1. At blande 10 kort.

(1) Anta at et kort ligger på position k i kortstokken. Hvor lander denne kort efter vi blander en gang med metode A? Hva er svaret hvis vi blander en gang med metode B? Bruk modulare aritmetikk for at finne en simpel formel sådan at man ikke har flere tilfaller avhengig om kortet ligger i den første halvedel eller den annen halvedel.

(2) Anta at kortstokken har $N = 52$ kort. Hva er den mindste tall $m > 1$ således at kortstokken er tilbake til ordningen den starter i efter man har utført metode A m gange? Hva er svaret hvis vi bruker metode B istedet for metode A?

(3) Finn et generelt karakterisering for mindste tallet $m > 1$ slik at en kortstokk med N kort er tilbake i den inisjale ordning efter man har blandet m gang med metode A (og metode B).